

Vergleichssätze für Diffusionsprozesse

von

Pawel Kröger
aus Bad Saarow

Vergleichssätze für Diffusionsprozesse

**Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg**

zur

Erlangung des Doktorgrades

**vorgelegt von
Pawel Kröger
aus Bad Saarow**

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 17.11.1986

Vorsitzender der Promotionskommission:

Professor Dr. G. Nollau

Erstberichterstatter:

Professor Dr. H. Bauer

Zweitberichterstatter:

Professor Dr. G. Ritter

Inhalt

0. Einleitung	1
1. Grundlagen	6
1.1. Zu Familien von semielliptischen linearen Differentialoperatoren assoziierte Familien von Übergangsmaßen	
1.2. Einfache Folgerungen	9
1.3. Konstruktion von Übergangsmaßen mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten eines Diffusionsprozesses	14
1.4. Eindeutigkeit der Übergangsmaße	29
1.5. Darstellung von Lösungen parabolischer Differentialgleichungen durch Übergangswahrscheinlichkeiten	32
1.6. Die Rückwärtsgleichung	33
2. Ein Vergleichslemma	37
3. Majorisierungen für Übergangsmaße	44
4. Untere Schranken für Übergangswahrscheinlichkeiten	64
5. Ein Vergleichslemma für unbeschränkte Funktionen	71
6. Auslöschung negativer Anteile einer Funktion unter Übergangsabbildungen	82
7. Ein Gegenbeispiel zu L^1 -Abschätzungen für Lösungen parabolischer Differentialgleichungen	94
Anhang	103
Bezeichnungen	107
Literatur	108



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546206_0043

O. Einleitung

Es werden Diffusionsprozesse auf $\mathbb{R}^d$ untersucht, die zu Familien elliptischer linearer Differentialoperatoren mit beschränkten und gleichmäßig stetigen Koeffizienten assoziiert sind.

Nach STROOCK und VARADHAN [1] und [3] wird ein Diffusionsprozeß, der zu einer Familie $\{L_t\}$ elliptischer Differentialoperatoren der Form

$$L_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\cdot, t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(\cdot, t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

assoziiert ist, durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge der Pfade mit vorgegebenem Startpunkt beschrieben, das das sogenannte Martingalproblem löst. Dabei löst das Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{t_1, x}$ auf der Menge der Pfade aus $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ mit dem Startpunkt (t_1, x) das Martingalproblem, wenn

$$t_2 \rightarrow \varphi(x(t_2)) - \int_{t_1}^{t_2} L_t \varphi(x(t)) dt$$

für jede Testfunktion φ ein Martingal ist. Für die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten $P(t_1, x; t, \cdot)$ gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) \varphi(y) - \varphi(x) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) L_t \varphi(y) dt.$$

Stroock und Varadhan zeigen, daß das Martingalproblem für alle Startpunkte eindeutig lösbar ist und leiten daraus her, daß der zugehörige stochastische Prozeß ein starker Markovprozeß mit der Feller-Eigenschaft ist. Insbesondere bilden die mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten definierten Übergangs-

abbildungen $f \rightarrow P^{t_1, t_2} f$ mit

$$P^{t_1, t_2} f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) f(y) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d$$

und geeignete Funktionen f den Raum $C_b(\mathbb{R}^d)$ der stetigen beschränkten Funktionen von $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}$ in sich ab.

Durch Betrachtung geeigneter Unterprozesse der in STROOCK/ VARADHAN [1] und [3] betrachteten Prozesse erhält man Familien von Maßen $P(t_1, x; t_2, \cdot)$, die in entsprechender Weise zu Familien $\{L_t\}$ elliptischer Differentialoperatoren der Form

$$L_t = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\cdot, t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(\cdot, t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + c(\cdot, t)$$

assoziiert sind.

Wir erwähnen noch, daß unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen an die Funktionen $P^{t_1, t_2} f$ die Rückwärts- oder Kolmogorovgleichung gilt, die ebenfalls zur Beschreibung des Diffusionsprozesses verwendet werden kann:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} P^{t_1, t_2} f = -L_{t_1} P^{t_1, t_2} f$$

(der Zusammenhang zwischen Diffusionsprozessen und parabolischen Differentialgleichungen wird in den Abschnitten 1.5. und 1.6. skizziert).

In der vorliegenden Arbeit werden die Übergangsmaße und die ihnen zugeordneten Übergangsabbildungen untersucht. Für diese Untersuchungen sind Vergleichssätze der folgenden Form grundlegend:

Seien Familien $\{L_t\}$ und $\{\tilde{L}_t\}$ von elliptischen Differentialoperatoren gegeben. Es gelte $L_t f \leq \tilde{L}_t f$ für alle t und für alle Funktionen f aus einer bestimmten Klasse

von Funktionen. Dann folgt $P^{t_1, t_2}_F \leq \tilde{P}^{t_1, t_2}_F$ für alle t_1, t_2 mit $t_1 \leq t_2$ und geeignete Funktionen F .

Durch entsprechende Wahl der Familie $\{\tilde{L}_t\}$ und der betrachteten Funktionen lassen sich obere und untere Schranken für die Übergangswahrscheinlichkeiten des zu der Familie $\{L_t\}$ assoziierten Diffusionsprozesses angeben. Im Gegensatz zu bekannten Abschätzungen für die Fundamentallösungen parabolischer Differentialgleichungen (vgl. MATIJCUK/EIDEL'MAN [1], FRIEDMAN [1], Chap. 1.4. und ARONSON [1]) sind die in dieser Arbeit angegebenen Schranken unabhängig vom Stetigkeitsmodul der Koeffizienten der Differentialoperatoren L_t .

Wir geben nun eine Übersicht über den Inhalt der einzelnen Abschnitte der Arbeit.

In Abschnitt 1 werden bekannte Resultate über Diffusionsprozesse und den Zusammenhang mit parabolischen Differentialgleichungen für die Zwecke dieser Arbeit zusammengestellt und umformuliert. Aus technischen Gründen (vor allem für die Abschnitte 3 und 4) wird die Voraussetzung $c \leq 0$ und beschränkt (nur unter dieser Voraussetzung lassen sich die Übergangsmaße als Übergangswahrscheinlichkeiten eines Diffusionsprozesses interpretieren) durch die Voraussetzung c beschränkt ersetzt.

In Abschnitt 2 wird unter gewissen Voraussetzungen an die Ableitungen der Funktionen $\tilde{P}^{t, t_2}_f$ für gewisse beschränkte Funktionen f eine Integraldarstellung der folgenden Form für die Differenzen $P^{t_1, t_2}_f - \tilde{P}^{t_1, t_2}_f$ gegeben:

$$P^{t_1, t_2}_f - \tilde{P}^{t_1, t_2}_f = \int_{t_1}^{t_2} P^{t_1, t}(L_t - \tilde{L}_t) \tilde{P}^{t, t_2}_f dt.$$

Insbesondere folgt aus $(L_t - \tilde{L}_t) \tilde{P}^{t, t_2}_f \leq 0$ für alle t ,
daß gilt $P^{t_1, t_2}_f \leq \tilde{P}^{t_1, t_2}_f$.

Dieses Vergleichslemma und verwandte Aussagen (vgl. Abschnitt 5) spielen eine zentrale Rolle beim Beweis der Sätze dieser Arbeit. Da keine Voraussetzungen an die Regularität der Funktionen P^{s_1, s_2}_f für bestimmte s_1, s_2 benötigt werden, kann das obige Vergleichslemma auch noch in Situationen angewendet werden, in denen das Maximumprinzip für parabolische Differentialgleichungen nicht mehr anwendbar ist (vgl. z.B. Folgerung 2.2 und Bemerkung 2.2).

In Abschnitt 3 werden Abschätzungen der Form $P^{t_1, t_2}_f \leq \tilde{P}^{t_1, t_2}_f$ für geeignete unbeschränkte Funktionen f hergeleitet. Aus der Summierbarkeit einer geeigneten nichtnegativen Funktion f in Bezug auf die Maße $\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)$ für $x \in \mathbb{R}^d$ kann damit auf die Summierbarkeit der Funktion f in Bezug auf die Maße $P(t_1, x; t_2, \cdot)$ geschlossen werden. Diese Ergebnisse verschärfen die bekannten exponentiellen Majorisierungen für Übergangswahrscheinlichkeiten.

In Abschnitt 4 werden dagegen Minoranten für Übergangswahrscheinlichkeiten konstruiert. Dazu werden für eine vorgegebene Familie $\{L_t\}$ von Differentialoperatoren eine Klasse von Funktionen mit kompaktem Träger und eine Familie $\{\tilde{L}_t\}$ konstruiert, so daß gilt $L_t f \geq \tilde{L}_t f$ für alle t und alle Funktionen f aus der angegebenen Klasse. Hieraus erhält man für vorgegebene t_1, t_2 und eine positive Zahl r eine Abschätzung der folgenden Form:

$$P(t_1, x; t_2, U_r(y)) \geq \frac{1}{K} \cdot \exp(-K \cdot \|y - x\|^2) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^d$$

für eine feste positive Zahl K .

In Abschnitt 5 wird das Vergleichslemma aus Abschnitt 2 unter bestimmten zusätzlichen Voraussetzungen auf unbeschränkte Funktionen, die bestimmten Wachstumsbedingungen genügen, verallgemeinert.

In Abschnitt 6 werden die Ergebnisse aus den vorhergehenden Abschnitten benutzt, um zu zeigen, daß die Funktionen p^{t_1, t_2}_f für gewisse Funktionen f , die auch negative Werte annehmen können, positiv sind. Schwierigkeiten bereitet dabei das Verhalten der Funktionen p^{t_1, t_2}_f im Unendlichen. Das Hauptresultat aus Abschnitt 6 wird im Abschnitt 7 in einer speziellen Situation angewendet, um ein Gegenbeispiel zu L^1 -Abschätzungen für Lösungen parabolischer Differentialgleichungen zu konstruieren.

Im Anhang werden einige technische Hilfsmittel zusammengestellt und bewiesen.

Die Bezeichnungen wurden so weit wie möglich aus STROOCK/VARADHAN [3] übernommen. Eine Liste von Bezeichnungen, die in dieser Arbeit ohne Erklärung verwendet werden, findet man vor dem Literaturverzeichnis.

Ich möchte Herrn Professor H. Bauer sehr herzlich für die Anregung und Betreuung dieser Arbeit danken. Herrn Professor G. Ritter fühle ich mich zu Dank für die Übernahme des Zweitgutachtens verpflichtet.

1. Grundlagen

1.1. Zu Familien von semielliptischen linearen Differentialoperatoren assoziierte Familien von Übergangsmaßen

Die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus diesem Abschnitt werden wir in der gesamten Arbeit beibehalten.

Wir betrachten Familien $\{L_t\}_{t \in I}$ von linearen Differentialoperatoren 2. Ordnung auf $\mathbb{R}^d$ für $d \geq 1$ und für ein Zeitintervall I der Form $[t_a, t_b]$ oder $[t_a, \infty)$. Die Operatoren L_t mögen also für alle t aus I die folgende Form haben:

$$L_t = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(.,t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(.,t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + c(.,t).$$

Wir setzen dabei voraus, daß die Koeffizienten $a_{ij}(.,t)$, $b_i(.,t)$, $c(.,t)$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

L1.) a_{ij} , b_i , c sind für $i, j = 1, \dots, d$ beschränkte und gleichmäßig stetige Funktionen von $\mathbb{R}^d \times I$ in $\mathbb{R}$.

L2.) Die Matrix $(a_{ij}(x,t))_{i,j=1}^d$ ist für alle x aus $\mathbb{R}^d$ und t aus I positiv semidefinit.

Die Glieder $a_{ij}(.,t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ bezeichnen wir auch als Glieder 2. Ordnung des Differentialoperators L_t , entsprechend nennen wir $b_i(.,t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $c(.,t)$ die Glieder 1. bzw. 0. Ordnung.

Wir nennen eine Familie $\{P(t_1, x; t_2, .)\}_{t_1, t_2 \in I, t_1 \leq t_2; x \in \mathbb{R}^d}$ von Maßen eine zu der Familie $\{L_t\}_{t \in I}$ assoziierte Familie von Übergangsmaßen, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

P1.) $P(t_1, x; t_2, \cdot)$ ist ein beschränktes positives Borel-Maß auf $\mathbb{R}^d$ für beliebige $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

P2.) a) Für jede Borel-Menge $B \subseteq \mathbb{R}^d$ und beliebige $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ ist die Funktion $x \rightarrow P(t_1, x; t_2, B)$ für $x \in \mathbb{R}^d$ Borel-meßbar.

b) Für jede Funktion $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ und beliebige $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ ist die Funktion $x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) f(y)$ für $x \in \mathbb{R}^d$ stetig.

c) Für jede Funktion $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ und beliebige $t_1 \in I$ und $x \in \mathbb{R}^d$ ist die Funktion $t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) f(y)$ für $t \in I$ mit $t \geq t_1$ stetig.

P3.) Für jede Borel-Menge $B \subseteq \mathbb{R}^d$ und beliebige $t_1, t_2, t_3 \in I$ mit $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ gilt:

$$P(t_1, x; t_3, B) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) P(t_2, y; t_3, B).$$

(Rechtfertigung: Die Funktion $y \rightarrow P(t_2, y; t_3, B)$ ist nach P2.) Borel-meßbar. Nach P1.) ist $P(t_2, y; t_3, B)$ für jedes y nichtnegativ, daher können wir die Funktion $y \rightarrow P(t_2, y; t_3, B)$ in Bezug auf das Maß $P(t_1, x; t_2, \cdot)$ integrieren und erhalten Werte aus $[0, \infty]$.)

P4.) Für jede Funktion $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ und beliebige $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ und $x \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) f(y) \\ &= f(x) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) (L_t f)(y) dt. \end{aligned}$$

(Die Existenz des äußeren Integrals auf der rechten Seite der obigen Gleichung folgt aus P1.) und P2.), vgl. Hilfssatz 1.)

Anmerkungen: Wir werden in Abschnitt 1.3. zeigen, daß für $c \leq 0$ die Übergangsmaße eines geeigneten Diffusionsprozesses den Bedingungen P1.) - P4.) genügen. P3.) folgt aus der schwachen Markoveigenschaft des Diffusionsprozesses. P2.)b) folgt unter der zusätzlichen Annahme $c = 0$ aus der Feller-Eigenschaft des Diffusionsprozesses (siehe STROOCK/VARADHAN [3], Theorem 7.2.4). P2.)a) läßt sich aus P2.)b) herleiten, da die Menge derjenigen beschränkten Borel-meßbaren Funktionen f , für die $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) f(y)$ Borel-meßbar ist, mit einer beliebigen punktweise konvergenten Folge von Funktionen auch deren Grenzwert enthält. P2.)c) dient der Vorbereitung von P4.) (siehe Hilfssatz 1). P4.) erhalten wir für $c = 0$ daraus, daß das Maß $P_{t_1, x}$ zum Startpunkt (t_1, x) das zugehörige Martingalproblem löst (vgl. STROOCK/VARADHAN [3], Abschnitt 6.0.).

Bemerkung 1: Für $t_2 = t_1$ erhalten wir aus P4.), daß gilt $P(t_1, x; t_1, \cdot) = \delta_x$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$.

Definition 1: Seien eine Borel-meßbare Funktion f von $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}$ und $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ gegeben, so daß der negative Teil $\min\{f; 0\}$ von f in Bezug auf die Maße $P(t_1, x; t_2, \cdot)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ summierbar ist. Dann definieren wir die Funktion $P^{t_1, t_2} f$ von $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ durch

$$P^{t_1, t_2} f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) f(y) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Entsprechend definieren wir für eine Borel-meßbare Funktion f von $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}$ und $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$, so daß der positive Teil $\max\{f; 0\}$ von f in Bezug auf die Maße $P(t_1, x; t_2, \cdot)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ summierbar ist, die Funktion $P^{t_1, t_2} f$ von $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Bemerkung 2: Nach P2.)b) ist die Funktion $P^{t_1, t_2} f$ für jede Funktion $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ eine stetige Funktion von $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}$.

1.2. Einfache Folgerungen

Beim Beweis des folgenden Hilfssatzes verwenden wir nur die Bedingungen P1.) und P2.). Aus der Behauptung des Hilfssatzes folgt insbesondere, daß das in der Formulierung der Bedingung P4.) auftretende Integral $\int_{t_1}^2 \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) (L_t f)(y) dt$ existiert.

Hilfssatz 1: Für jede Funktion $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ und beliebige $t_1 \in I$ und $x \in \mathbb{R}^d$ ist die Funktion

$$t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) (L_t f)(y) \quad \text{für } t \in I \text{ mit } t \geq t_1$$

stetig.

Beweis: Sei $t_0 \in I$ mit $t_0 \geq t_1$ gegeben. Wir zeigen, daß die obige Funktion im Punkt t_0 stetig ist. Aus der Dreiecksungleichung folgt:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) (L_t f)(y) - \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_0, dy) (L_{t_0} f)(y) \right| \\ & \leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) (L_{t_0} f)(y) - \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_0, dy) (L_{t_0} f)(y) \right| \\ & \quad + \left| \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) (L_t f)(y) - \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) (L_{t_0} f)(y) \right| \end{aligned}$$

für alle $t \in I$ mit $t \geq t_1$. Da die Koeffizienten des Differentialoperators L_{t_0} beschränkte stetige Funktionen sind, liegt $L_{t_0} f$ in $C_b(\mathbb{R}^d)$. Aus P2.)c) folgt somit, daß der erste Summand auf der rechten Seite der obigen Ungleichung für $t \rightarrow t_0$ gegen Null konvergiert. Da die Koeffizienten der Differentialoperatoren L_t gleichmäßig stetig bezüglich t sind, konvergieren die Funktionen $L_t f$ für $t \rightarrow t_0$ gleichmäßig gegen die Funktion $L_{t_0} f$. Andererseits ist die Funktion $t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy)$ nach P2.)c) stetig und damit in einer Umgebung von t_0 beschränkt. Folglich konvergiert auch der zweite Summand auf der rechten Seite der obigen Ungleichung für $t \rightarrow t_0$ gegen Null.

Im folgenden Hilfssatz benutzen wir die Bedingung P4.), um eine obere und eine untere Schranke für die Gesamtmasse des Maßes $P(t_1, x; t_2, \cdot)$ anzugeben.

Hilfssatz 2: Sei C_1 eine untere und sei C_2 eine obere Schranke der Funktion c . Dann gilt:

$$\exp(C_1 \cdot (t_2 - t_1)) \leq P(t_1, x; t_2, \mathbb{R}^d) \leq \exp(C_2 \cdot (t_2 - t_1))$$

für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Beweis: Seien $t_1 \in I$ und $x \in \mathbb{R}^d$ fest. Wir definieren eine Funktion M auf $I \cap [t_1, \infty)$ durch

$$M(t) := P(t_1, x; t, \mathbb{R}^d) \quad \text{für alle } t \in I \cap [t_1, \infty).$$

Aus P4.) folgt $P(t_1, x; t_1, \cdot) = \delta_x$ (siehe Bemerkung 1).

Also ist $M(t_1) = 1$. Für $t_1 = t_2 = \sup_{t \in I} t$ ist die Behauptung des Hilfssatzes erfüllt.

Sei $t_1 < \sup_{t \in I} t$. Nach Hilfssatz 1 ist die Funktion

$t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) (L_{t_1}^1)(y)$ stetig. Wir erhalten somit aus P4.) für $f \equiv 1$ durch Differentiation nach t_2 :

$$\frac{dM}{dt}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) (L_{t_1}^1)(y) \quad \text{für alle } t \in \text{In}[t_1, \infty).$$

Weiter folgt aus $L_{t_1}^1 = c(\cdot, t)$ und $c(\cdot, t) \geq C_1$, daß gilt

$$\frac{dM}{dt}(t) \geq \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) C_1 = C_1 \cdot M(t) \quad \text{für alle } t.$$

Die Funktion $t \rightarrow \exp(-C_1 \cdot (t - t_1)) \cdot M(t)$ hat nach der Produktregel die Ableitung

$$t \rightarrow \exp(-C_1 \cdot (t - t_1)) \cdot \left(\frac{dM}{dt}(t) - C_1 \right).$$

Aus der letzten Ungleichung folgt daher, daß die Funktion $t \rightarrow \exp(-C_1 \cdot (t - t_1)) \cdot M(t)$ monoton wachsend ist. Es folgt insbesondere

$$\exp(-C_1 \cdot (t_2 - t_1)) \cdot M(t_2) \geq \exp(-C_1 \cdot (t_1 - t_1)) \cdot M(t_1) = 1$$

für alle $t_2 \in I$ mit $t_2 \geq t_1$. Hieraus folgt der erste Teil der Behauptung. Analog kann man den zweiten Teil der Behauptung beweisen. Den zweiten Teil der Behauptung könnte man jedoch auch aus dem Lemma von Gronwall herleiten (siehe z.B. DIEUDONNE [1], Chap. 10.5.).

Bemerkung 3: Da die Funktion c nach L1.) beschränkt ist, existiert stets eine reelle Zahl C_2 , die eine obere Schranke der Funktion c ist. Aus Hilfssatz 2 folgt dann:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) f(y) \right| \leq \exp(C_2 \cdot (t_2 - t_1)) \cdot \|f\|_{\infty}$$

für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$, alle $x \in \mathbb{R}^d$ und alle Funktionen $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Insbesondere ist die Funktion

P^{t_1, t_2}_f für jede Funktion $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ und beliebige $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ beschränkt. Nach P2.)b) ist die Funktion P^{t_1, t_2}_f auch stetig (siehe Bemerkung 2). Somit bildet P^{t_1, t_2} für beliebige $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ die Menge $C_b(\mathbb{R}^d)$ in sich ab. Die Abbildungen P^{t_1, t_2} werden wir auch als Übergangsabbildungen bezeichnen.

Bemerkung 4: Sei $c(x, t) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $t \in I$. Dann ist $C_2 := 0$ eine obere Schranke der Funktion c . Aus Hilfssatz 2 folgt dann $P(t_1, x; t_2, \mathbb{R}^d) \leq 1$ für alle t_1, t_2 und x . Für $c = 0$ folgt aus Hilfssatz 2 sogar $P(t_1, x; t_2, \mathbb{R}^d) = 1$ für alle t_1, t_2 und x . Mit P1.) erhalten wir, daß die Übergangsmaße im Fall $c = 0$ Wahrscheinlichkeitsmaße sind.

Aus dem folgenden Hilfssatz ergibt sich insbesondere, daß die Maße $P(t_1, x; t_2, \cdot)$ für $t_2 - t_1 \downarrow 0$ und ein festes $x \in \mathbb{R}^d$ in der schwachen Topologie gegen das Punktmaß δ_x konvergieren.

Hilfssatz 3: Für jede positive Zahl δ gelten:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} [\sup \{ P(t_1, x; t_2, U_\delta(x)) \mid t_1, t_2 \in I \text{ mit } t_1 < t_2 < t_1 + \varepsilon, \\ x \in \mathbb{R}^d \}] = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} [\sup \{ P(t_1, x; t_2, U_\delta(x)) \mid t_1, t_2 \in I \text{ mit } t_1 < t_2 < t_1 + \varepsilon, \\ x \in \mathbb{R}^d \}] = 1.$$

Beweis: Wir definieren Funktionen f_x aus $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ für alle x aus $\mathbb{R}^d$ durch

$$f_x(y) := \|y - x\|^2 / (1 + \|y - x\|^2) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^d.$$

Die Funktionen f_x und ihre partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung sind gleichmäßig beschränkt für $x \in \mathbb{R}^d$.

Aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Funktionen

$a_{ij}(\cdot, t)$, $b_i(\cdot, t)$, $c(\cdot, t)$ für alle $t \in I$ und alle i, j

folgt somit, daß für eine geeignete Konstante K gilt:

$$(L_t f_x)(y) \leq K \quad \text{für alle } t \in I \text{ und } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Aus $1_{(U_\delta(x))} \leq \frac{1+\delta^2}{\delta^2} \cdot f_x$ folgt daher:

$$P(t_1, x; t_2, (U_\delta(x))) \leq \frac{1+\delta^2}{\delta^2} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) f_x(y)$$

$$\begin{aligned} P4.) \quad & \frac{1+\delta^2}{\delta^2} \cdot (f_x(x) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) (L_t f_x)(y) dt) \\ & \leq \frac{1+\delta^2}{\delta^2} \cdot (f_x(x) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) K dt) \end{aligned}$$

Nach Definition ist $f_x(x) = 0$. Sei $C := \|c\|_\infty$. Dann folgt aus Hilfssatz 2:

$$P(t_1, x; t_2, (U_\delta(x))) \leq \frac{1+\delta^2}{\delta^2} \cdot K \cdot \int_{t_1}^{t_2} \exp(C \cdot (t-t_1)) dt$$

für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Für $t_1 < t_2 < t_1 + \varepsilon$ gilt jedoch:

$$\frac{1+\delta^2}{\delta^2} \cdot K \cdot \int_{t_1}^{t_2} \exp(C \cdot (t-t_1)) dt \leq \frac{1+\delta^2}{\delta^2} \cdot K \cdot \varepsilon \cdot \exp(C \cdot \varepsilon).$$

Hieraus folgt der erste Teil der Behauptung.

Aus Hilfssatz 2 folgt für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2 < t_1 + \varepsilon$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$:

$$|P(t_1, x; t_2, \mathbb{R}^d) - 1| \leq \exp(C \cdot \varepsilon) - 1.$$

Hieraus und aus dem bereits bewiesenen Teil der Behauptung folgt der zweite Teil der Behauptung.

1.3. Konstruktion von Übergangsmaßen mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten eines Diffusionsprozesses

Wir übernehmen die Voraussetzungen von Abschnitt 1.1. und setzen zusätzlich voraus, daß die Matrix $(a_{ij}(x,t))_{i,j=1}^d$ für alle x aus $\mathbb{R}^d$ und alle t aus I positiv definit ist. Die Existenz einer zu der Familie $\{L_t\}_{t \in I}$ assoziierten Familie von Übergangsmaßen folgt dann aus Sätzen über Diffusionsprozesse.

Wir zeigen dies zunächst im Fall einer Familie $\{L_t\}$ von Differentialoperatoren, deren Glieder 0. Ordnung identisch verschwinden. Sei also $c \equiv 0$. Die Wahrscheinlichkeitsmaße, die den zu der Familie $\{L_t\}$ assoziierten Diffusionsprozeß beschreiben, werden in STROOCK/VARADHAN [3] durch das sogenannte Martingalproblem charakterisiert. Da in STROOCK/VARADHAN [3] nur das Zeitintervall $[0, \infty)$ betrachtet wird, setzen wir zunächst $I = [0, \infty)$ voraus.

Definition 2 (siehe STROOCK/VARADHAN [3], Abschnitt 6.0.):

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ mit der Eigenschaft $P(x(t) = x \text{ für alle } t \text{ mit } 0 \leq t \leq s) = 1$ heißt Lösung des Martingalproblems für $\{L_t\}$ zum Startpunkt (s, x) , wenn

$$f(x(t)) - \int_s^t L_u f(x(u)) du$$

ein P -Martingal für $t \geq s$ ist für alle $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

In STROOCK/VARADHAN [3], Theorem 7.2.1. wurde gezeigt, daß

für jedes Paar (s, x) mit $s \in I$ und $x \in \mathbb{R}^d$ genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{s,x}$ auf $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ existiert, das das Martingalproblem für $\{L_t\}$ zum Startpunkt (s, x) löst. Aus STROOCK/VARADHAN [3], Theorem 4.2.1 folgt, daß dann auch

$$f(x(t)) - \int_s^t L_u f(x(u)) du$$

ein $P_{s,x}$ -Martingal für $t \geq s$ ist für alle $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$.

Sei $x(t)$ für t aus I die Projektionsabbildung von $C(I, \mathbb{R}^d)$ auf $\mathbb{R}^d$, die wie folgt definiert wird:

$$x(t)(\omega) := \omega(t) \quad \text{für jeden Pfad } \omega \in C(I, \mathbb{R}^d).$$

Die Abbildung $x(t)$ ist Borel-meßbar. Wir definieren

$P(t_1, x; t_2, \cdot)$ als Projektion des Maßes $P_{t_1, x}$ von $C(I, \mathbb{R}^d)$ auf $\mathbb{R}^d$ in Bezug auf die Projektionsabbildung $x(t_2)$, sei also:

$$P(t_1, x; t_2, B) := P_{t_1, x}(x(t_2) \in B)$$

für jede Borel-Menge $B \subseteq \mathbb{R}^d$ (vgl. STROOCK/VARADHAN [3], Theorem 2.2.4 Formel (2.9) und Theorem 6.2.2).

Wir zeigen, daß die Familie der Maße $P(t_1, x; t_2, \cdot)$ die Bedingungen P1.) - P4.) erfüllt. Die Bedingung P1.) folgt unmittelbar aus der Definition, da die Maße $P_{t_1, x}$ Wahrscheinlichkeitsmaße und damit beschränkt und positiv sind.

Nach STROOCK/VARADHAN [3], Theorem 7.2.4 ist die Familie

$\{P_{s,x} \mid s \in I; x \in \mathbb{R}^d\}$ Feller-stetig, d.h. für beliebige Folgen $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus I mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ und $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}^d$ mit

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ konvergiert die Folge der Maße P_{s_n, x_n} für $n \rightarrow \infty$ schwach gegen das Maß $P_{s, x}$ (siehe STROOCK/VARADHAN [3], Corollary 6.3.3). Seien eine Funktion $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ und ein $x \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Sei weiter $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}^d$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Wir setzen $s_n := t_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Funktion $f \circ x(t_2)$ eine stetige Funktion von $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ (versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Teilmengen von $[0, \infty)$) in $\mathbb{R}$ ist, erhalten wir aus der Feller-Stetigkeit der Familie $\{P_{s, x}\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{t_1, x_n} [f \circ x(t_2)] = E_{t_1, x} [f \circ x(t_2)]$$

(dabei bezeichnet $E_{s, y}$ den Erwartungswert bezüglich des Maßes $P_{s, y}$, siehe die Liste der Bezeichnungen). Also gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x_n; t_2, dy) f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) f(y) .$$

Hieraus folgt P2.)b).

Nach STROOCK/VARADHAN [3], Theorem 7.2.1 ist die Familie $\{P_{s, x}\}_{s \in I; x \in \mathbb{R}^d}$ meßbar. Insbesondere ist die Abbildung

$$x \rightarrow P_{t_1, x} (x(t_2) \in B)$$

für jede Borel-Menge B aus $\mathbb{R}^d$ und beliebige $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ Borel-meßbar. Hieraus folgt P2.)a).

Die Bedingung P3.) folgt aus der schwachen Markoveigenschaft des zugehörigen Diffusionsprozesses (siehe STROOCK/VARADHAN [3], Theorem 7.2.1).

Da $P_{t_1, x}$ das Martingalproblem zum Startpunkt (t_1, x)

löst, gilt insbesondere

$$E_{t_1, x} [f(x(t_2)) - \int_{t_1}^{t_2} L_t f(x(t)) dt] = f(x)$$

für jede Funktion $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$. Die Funktion

$(t, \omega) \rightarrow L_t f(\omega(t))$ ist gemeinsam Borel-meßbar (sie ist sogar stetig, wenn $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ wie oben mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Teilmengen von $[0, \infty)$ versehen wird) und beschränkt. Also folgt aus dem Satz von Fubini, daß die Funktion

$$t \rightarrow E_{t_1, x} [L_t f(x(t))]$$

Borel-meßbar ist und daß gilt

$$(1) \quad E_{t_1, x} \left[\int_{t_1}^{t_2} L_t f(x(t)) dt \right] = \int_{t_1}^{t_2} E_{t_1, x} [L_t f(x(t))] dt.$$

Wir setzen dies in die vorige Gleichung ein und erhalten

$$E_{t_1, x} [f(x(t_2))] - f(x) = \int_{t_1}^{t_2} E_{t_1, x} [L_t f(x(t))] dt.$$

Die Bedingung P4.) folgt aus der Definition der Maße

$$P(t_1, x; t_2, \cdot).$$

Weiter folgt, daß die Funktion $t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) f(y)$ für $t \in I \cap [t_1, \infty)$ bis auf eine Konstante gleich dem unbestimmten Integral der beschränkten Borel-meßbaren Funktion $t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t, dy) L_t f(y)$ ist. Da $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ in Bezug auf $\|\cdot\|_\infty$ dicht in $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ ist, folgt die Bedingung P2.)c).

Seien jetzt ein Intervall I der Form $[0, t_b]$ für eine nichtnegative Zahl t_b und eine Familie $\{L_t\}_{t \in I}$ von Differentialoperatoren gegeben. Wir definieren eine Familie $\{\tilde{L}_t\}_{t \in [0, \infty)}$ von Differentialoperatoren durch $\tilde{L}_t := L_t$

für $t \in [0, t_b]$ und $\tilde{L}_t := L_{t_b}$ für $t > t_b$. Die Familie $\{\tilde{L}_t\}_{t \in [0, \infty)}$ erfüllt wieder die Bedingungen L1.) und L2.). Aus der obigen Konstruktion folgt, daß eine Familie $\{\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)\}_{t_1, t_2 \in [0, \infty); x \in \mathbb{R}^d}$ von Maßen existiert, die zu der Familie $\{\tilde{L}_t\}_{t \in [0, \infty)}$ assoziiert ist. Mit der Teilfamilie $\{\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)\}_{t_1, t_2 \in I; x \in \mathbb{R}^d}$ der oben konstruierten Familie von Maßen erhalten wir eine Familie, die zu der Familie $\{L_t\}_{t \in I}$ assoziiert ist.

Der Fall eines beliebigen Zeitintervalls I der Form $[t_a, \infty)$ oder $[t_a, t_b]$ für $t_a, t_b \in \mathbb{R}$ mit $t_a \leq t_b$ läßt sich durch eine Zeittranslation auf einen der bisher betrachteten Fälle zurückführen.

Sei jetzt $\{L_t\}_{t \in I}$ eine beliebige Familie von Differentialoperatoren, die die Bedingungen L1.) und L2.) und die zusätzliche Voraussetzung $(a_{ij}(x, t))_{i,j=1}^d$ positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $t \in I$ erfüllt. Die folgende Konstruktion lehnt sich an die Konstruktion von Unterprozessen eines Markovschen Prozesses an (vgl. DYNKIN [1], Abschnitt 3.4.). Den Friedhof eines Markovschen Prozesses (mit Lebenszeitfunktion) bezeichnen wir mit ω_a . Die zulässigen Pfade des Markovschen Prozesses seien diejenigen Funktionen ω von I in $\mathbb{R}^d \cup \{\omega_a\}$, die die folgende Bedingung erfüllen:

Der Funktion ω läßt sich eine Lebenszeit $\zeta(\omega)$ mit $\zeta(\omega) \in I \cup \{+\infty\}$ zuordnen, so daß die Einschränkung von ω auf $I \cap (-\infty, \zeta(\omega))$ eine stetige Funktion mit Werten in $\mathbb{R}^d$ ist und daß für alle t aus I mit $t \leq \zeta(\omega)$ gilt $\omega(t) = \omega_a$.

Die Menge der zulässigen Pfade werden wir auch mit

$C(I, \mathbb{R}^d U\{\omega_a\})$ bezeichnen. Offensichtlich ist die Lebenszeit eines zulässigen Pfades eindeutig bestimmt, somit ist ζ eine Funktion von $C(I, \mathbb{R}^d U\{\omega_a\})$ in $I \cup \{+\infty\}$. Das durch einen Markovschen Prozeß auf $C(I, \mathbb{R}^d U\{\omega_a\})$ gegebene Wahrscheinlichkeitsmaß zum Startpunkt (t, x) bezeichnen wir mit $P_{t,x}$.

Hilfssatz 4: Sei $\{P(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ eine Familie von Übergangsmaßen, die zu einer Familie $\{L_t\}$ von Differentialoperatoren assoziiert ist. Es gelte $P(t_1, x; t_2, \mathbb{R}^d) \leq 1$ für alle t_1, t_2 aus I und x aus $\mathbb{R}^d$. Sei außerdem die folgende Bedingung (*) erfüllt:

Für jedes $T > 0$ gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß
 (*) gilt $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) \|y - x\|^4 \right) \leq C \cdot (t_2 - t_1)^2$
 für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2 \leq t_1 + T$.

Dann existiert ein Markovscher Prozeß auf $C(I, \mathbb{R}^d U\{\omega_a\})$, so daß gilt:

$$P(t_1, x; t_2, B) = P_{t_1, x}(x(t_2) \in B \text{ und } t_2 < \zeta)$$

für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$, $x \in \mathbb{R}^d$ und jede Borelmenge $B \subseteq \mathbb{R}^d$. Dieser Prozeß erfüllt die folgende Bedingung:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} P_{t_1, x}(\exists s_1, s_2 \in [t_1, t_2] \text{ mit } s_1, s_2 < \zeta \text{ und } |s_1 - s_2| < \delta, \text{ so daß gilt } \|x(s_1) - x(s_2)\| > \varepsilon) = 0$$

für alle $t_1, t_2 \in I$ und $\varepsilon > 0$.

Bemerkung 5: In Folgerung 5.1 werden wir zeigen, daß die Bedingung (*) bereits aus L1.), L2.) und P1.) bis P4.) folgt. Die Voraussetzung $P(t_1, x; t_2, \mathbb{R}^d) \leq 1$ ist nach Bemerkung 2 erfüllt, wenn gilt $c(x, t) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in I$.

Beweis des Hilfssatzes: Seien $E := \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{F}$ das System aller beschränkten Borel-Mengen in $\mathbb{R}^d$. Wir prüfen nach, daß die Voraussetzungen von DYNKIN [1], Abschnitt 6.15. Folgerung erfüllt sind. Nach (*) existiert für jede positive Zahl T eine Konstante C , so daß gilt:

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) \|y - x\|^4 \mid t_1 \leq t_2 \leq t_1 + \delta; x \in \mathbb{R}^d \right\} \leq C \cdot \delta^2$$

für alle positiven Zahlen δ mit $\delta \leq T$. Für jede positive Zahl ε gilt:

$$1_{CU_\varepsilon(x)}(y) \leq \frac{1}{\varepsilon^4} \cdot \|y - x\|^4 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt, daß für alle positiven Zahlen ε und δ mit $\delta \leq T$ gilt:

$$(2) \quad \sup \{P(t_1, x; t_2, CU_\varepsilon(x)) \mid t_1 \leq t_2 \leq t_1 + \delta; x \in \mathbb{R}^d\} \leq \frac{C}{\varepsilon^4} \cdot \delta^2.$$

Insbesondere gilt:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \cdot \sup \{P(t_1, x; t_2, CU_\varepsilon(x)) \mid t_1 \leq t_2 \leq t_1 + \delta; x \in \mathbb{R}^d\} = 0.$$

Hieraus folgt die Bedingung $N(\Gamma)$ aus DYNKIN [1], Abschnitt 6.12.

Sei E_0 eine beliebige beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^d$. Für jede positive Zahl ε definieren wir eine Menge Γ_ε aus $\mathcal{F}$ durch $\Gamma_\varepsilon := \bigcup_{x \in E_0} U_\varepsilon(x)$. Aus (2) folgt:

$$\sup \{P(t_1, x; t_2, E_0) \mid t_1 \leq t_2 \leq t_1 + \delta; x \in \Gamma_\varepsilon\} \leq \frac{C}{\varepsilon^4} \cdot \delta^2$$

für alle positiven Zahlen ε und δ mit $\delta \leq T$. Also gilt:

$$\inf_{\varepsilon > 0} \sup \{P(t_1, x; t_2, E_0) \mid t_1 \leq t_2 \leq t_1 + \delta; x \in \Gamma_\varepsilon\} = 0$$

für jede positive Zahl δ mit $\delta \leq T$. Hieraus folgt die

Bedingung 6.3.A. aus DYNKIN [1], Abschnitt 6.3. Nach DYNKIN [1], Abschnitt 6.15. Folgerung existiert somit ein stetiger Markovscher Prozeß (mit Lebenszeitfunktion), der die Übergangsmaße $P(t_1, x; t_2, \cdot)$ besitzt. Der zugehörige kanonische Prozeß (siehe DYNKIN [1], Lemma 2.3.) ist ein Markovscher Prozeß auf $C(I, \mathbb{R}^{d_{U\{\omega_a\}}})$, der dieselben Übergangsmaße besitzt. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Wir zeigen, daß der zweite Teil der Behauptung aus DYNKIN [1], Lemma 6.6. folgt. Sei hier $\Gamma := \mathbb{R}^d$ und sei Λ die Menge der rationalen Zahlen aus dem Intervall $[t_1, t_2]$. Dann folgt aus DYNKIN [1], Lemma 6.6., daß für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ und alle positiven Zahlen δ gilt:

$$P_{t_1, x} (\exists \text{ rationale Zahlen } s_1, s_2 \in [t_1, t_2] \text{ mit } s_1, s_2 < \zeta \\ \text{und } |s_1 - s_2| < \delta, \text{ so daß gilt } \|x(s_1) - x(s_2)\| > 4 \cdot \epsilon) \\ \leq 2 \cdot (t_2 - t_1) \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \sup \{P(s_1, y; s_2, U_\epsilon(y)) \mid s_1, s_2 \in I \text{ mit } \\ s_1 \leq s_2 \leq s_1 + 2 \cdot \delta; y \in \mathbb{R}^d\}.$$

Da der Markovsche Prozeß stetige Pfade hat, ist der Ausdruck auf der linken Seite der Ungleichung gleich

$$P_{t_1, x} (\exists s_1, s_2 \in [t_1, t_2] \text{ mit } s_1, s_2 < \zeta \\ \text{und } |s_1 - s_2| < \delta, \text{ so daß gilt } \|x(s_1) - x(s_2)\| > 4 \cdot \epsilon).$$

Damit folgt der zweite Teil der Behauptung aus (2).

Durch Vorgabe der Übergangsmaße ist das Borel-Maß $P_{t_1, x}$ auf $C(I, \mathbb{R}^{d_{U\{\omega_a\}}})$ für alle t_1, x eindeutig bestimmt. Die Existenz einer Familie von Übergangsmaßen, die zu einer beliebigen Familie $\{L_t\}$ elliptischer Differentialoperatoren

assoziiert ist, folgt aus:

Hilfssatz 5: Seien eine Familie $\{P(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ von Übergangsmaßen und eine Familie $\{L_t\}$ von Differentialoperatoren gegeben, die die Voraussetzungen von Hilfssatz 4 erfüllen. Weiter sei eine beschränkte gleichmäßig stetige Funktion k von $\mathbb{R}^d \times I$ in $\mathbb{R}$ gegeben. Für beliebige $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ und $x \in \mathbb{R}^d$ definieren wir ein Borel-Maß $P_k(t_1, x; t_2, \cdot)$ auf $\mathbb{R}^d$ durch

$$P_k(t_1, x; t_2, B) := E_{t_1, x} \left[\exp \left(\int_{t_1}^{t_2} k(x(t), t) dt \right) \cdot 1_B(x(t_2)) \right],$$

$t_2 < \zeta$]

für alle Borel-Mengen $B \subseteq \mathbb{R}^d$.

Dann ist die Familie $\{P_k(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ zu der Familie $\{L_t + k(\cdot, t)\}_{t \in I}$ assoziiert.

Beweis: Wir prüfen nach, daß die Familie $\{P_k(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ in Bezug auf die Familie $\{L_t + k(\cdot, t)\}$ die Bedingungen P1.) - P4.) erfüllt. Da das Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{t_1, x}$ insbesondere positiv ist, ist auch das Maß $P_k(t_1, x; t_2, \cdot)$ positiv für beliebige t_1, t_2 und x . Da $P_{t_1, x}$ ein beschränktes Maß ist und da die Funktion k nach Voraussetzung beschränkt ist, ist das Maß $P_k(t_1, x; t_2, \cdot)$ beschränkt. Hieraus folgt die Bedingung P1.).

Seien eine beschränkte Borel-meßbare Funktion f auf $\mathbb{R}^d$ und $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ gegeben. Wir setzen $T := t_2 - t_1$. Für den Nachweis der Bedingungen P2.)a) und P2.)b) beweisen wir zunächst die folgende Aussage:

Die Funktionen

$$x \rightarrow E_{t_1, x} \left[\exp \left(\frac{T}{n} \cdot \sum_{i=1}^n k \left(x \left(t_1 + i \cdot \frac{T}{n} \right), t_1 + i \cdot \frac{T}{n} \right) \right) \cdot f(x(t_2)) \right], t_2 < \zeta$$

(3) konvergieren für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die Funktion

$$x \rightarrow E_{t_1, x} \left[\exp \left(\int_{t_1}^{t_2} k(x(t), t) dt \right) \cdot f(x(t_2)) \right], t_2 < \zeta$$

Aus Hilfssatz 4 und aus der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion k folgt, daß die Folge der Funktionen

$$x \rightarrow P_{t_1, x} \left(\left| \int_{t_1}^{t_2} k(x(t), t) dt - \frac{T}{n} \cdot \sum_{i=1}^n k \left(x \left(t_1 + i \cdot \frac{T}{n} \right), t_1 + i \cdot \frac{T}{n} \right) \right| > \varepsilon, t_2 < \zeta \right)$$

für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen Null konvergiert für eine beliebige positive Zahl ε . Da die Funktion k beschränkt ist, folgt (3).

Andererseits folgt aus der Bedingung P3.) an die Familie $\{P(s_1, x; s_2, \cdot)\}$, daß gilt:

$$\begin{aligned} & E_{t_1, x} \left[\exp \left(\frac{T}{n} \cdot \sum_{i=1}^n k \left(x \left(t_1 + i \cdot \frac{T}{n} \right), t_1 + i \cdot \frac{T}{n} \right) \right) \cdot f(x(t_2)) \right], t_2 < \zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}} P \left(t_1, x; t_1 + \frac{T}{n}, dx_1 \right) \left\{ \exp \left(\frac{T}{n} \cdot k \left(x_1, t_1 + \frac{T}{n} \right) \right) \cdot \right. \\ & \quad \int_{\mathbb{R}} P \left(t_1 + \frac{T}{n}, x_1; t_1 + 2 \cdot \frac{T}{n}, dx_2 \right) \left\{ \exp \left(\frac{T}{n} \cdot k \left(x_2, t_1 + 2 \cdot \frac{T}{n} \right) \right) \cdot \right. \\ & \quad \dots \\ & \quad \left. \left. \int_{\mathbb{R}} P \left(t_2 - \frac{T}{n}, x_{n-1}; t_2, dy \right) \left\{ \exp \left(\frac{T}{n} \cdot k \left(y, t_2 \right) \right) \cdot f(y) \right\} \dots \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir durch sukzessive Anwendung der Bedingung P2.)a) an die Familie $\{P(s_1, x; s_2, \cdot)\}$, daß die Funktionen

$$x \rightarrow E_{t_1, x} \left[\exp \left(\frac{T}{n} \cdot \sum_{i=1}^n k \left(x \left(t_1 + i \cdot \frac{T}{n} \right), t_1 + i \cdot \frac{T}{n} \right) \right) \cdot f(x(t_2)) \right], t_2 < \zeta$$

Borel-meßbar sind für jede beschränkte Borel-meßbare Funktion

f auf $\mathbb{R}^d$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Analog erhalten wir durch sukzessive Anwendung der Bedingung P2.)b), daß die Funktionen

$$x \rightarrow E_{t_1, x} \left[\exp \left(\frac{T}{n} \cdot \sum_{i=1}^n k(x(t_1 + i \cdot \frac{T}{n}), t_1 + i \cdot \frac{T}{n}) \right) f(x(t_2)) \right], \quad t_2 < \zeta$$

stetig sind für jede Funktion $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Die Bedingungen P2.)a) und P2.)b) folgen jetzt aus der oben bewiesenen Aussage (3).

Die Bedingung P3.) folgt unmittelbar aus der schwachen Markoveigenschaft des in Hilfssatz 4 konstruierten Prozesses.

Wir kommen zum Beweis von P2.)c). Seien eine Funktion $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ und beliebige $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ und ein $x \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Wir zeigen, daß die Funktion

$$t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t, dy) f(y) \quad \text{auf } I \cap [t_1, \infty)$$

im Punkt t_2 stetig ist (für $t_2 = t_1$ zeigen wir die rechtsseitige Stetigkeit im Punkt t_2). Sei ε eine beliebige positive Zahl. Aus der bereits bewiesenen Bedingung P3.) folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t, dy) f(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t_0, dy) \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_0, y; t, dz) f(z) \end{aligned}$$

für alle $t_0 \in [t_1, t_2]$ und alle $t \in I \cap [t_0, \infty)$. Aus der Definition der Maße $P_k(t_0, y; t, \cdot)$ und aus Hilfssatz 2 folgt somit, daß eine positive Zahl δ existiert, so daß für alle $t_0 \in [t_1, t_2]$ mit $|t_0 - t_2| \leq \delta$ und alle $t \in I \cap [t_0, \infty)$ mit $|t - t_2| \leq \delta$ gilt:

$$\begin{aligned} (4) \quad & \left| \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t, dy) f(y) \right. \\ & \left. - \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t_0, dy) \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_0, y; t, dz) f(z) \right| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt $t_0 := \max \{t_1, t_2 - \delta\}$. Nach Hilfssatz 2 sind die Funktionen

$$t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P(t_0, y; t, dz) f(z) \quad \text{auf } \text{IN}[t_0, \infty) \overline{\text{NU}_\delta(t_2)}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^d$ gleichmäßig beschränkt und nach P2.)c)

stetig. Da das Maß $P_k(t_1, x; t_0, \cdot)$ beschränkt ist, ist auch die Funktion

$$t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t_0, dy) \int_{\mathbb{R}^d} P(t_0, y; t, dz) f(z)$$

auf $\text{IN}[t_0, \infty) \overline{\text{NU}_\delta(t_2)}$ stetig (das folgt aus der Definition der Stetigkeit mit Hilfe konvergenter Folgen und aus dem Satz über die dominierte Konvergenz von Lebesgue). Da ε eine beliebige positive Zahl war, erhalten wir aus (4), daß die Funktion

$$t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t, dy) f(y) \quad \text{auf } \text{IN}[t_1, \infty)$$

im Punkt t_2 stetig ist. Hieraus folgt die Bedingung P2.)c).

Wir zeigen jetzt, daß für jede Funktion $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ und beliebige $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2 < \sup_{t \in I} t$ und $x \in \mathbb{R}^d$ die rechtseitige Ableitung der Funktion

$$t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t, dy) f(y)$$

im Punkt t_2 existiert und gleich

$$\int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t_2, dy) ((L_{t_2} f)(y) + k(t_2, y) \cdot f(y))$$

ist. Da die Bedingungen P1.) und P2.) bereits bewiesen wurden, können wir dann aus Hilfssatz 1 folgern, daß die

Funktion $t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t, dy) f(y)$ stetig differenzierbar

ist. Die Bedingung P4.) folgt durch bestimmte Integration.

Nach P3.) gilt für alle $t \in I$ mit $t \geq t_2$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t-t_2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t, dy) f(y) - \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t_2, dy) f(y) \right\} \\ (5) \quad & = \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t_2, dy) \left\{ \frac{1}{t-t_2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_2, y; t, dz) f(z) - f(y) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Sei δ eine positive Zahl mit $t_2 + \delta \in I$. Aus der Definition der Maße $P_k(t_2, y; t, \cdot)$ und aus der Bedingung P4.) an die Familie $\{P(s_1, z; s_2, \cdot)\}$ in Bezug auf $\{L_s\}$ folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t-t_2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_2, y; t, dz) f(z) - f(y) \right) \\ (6) \quad & = E_{t_2, y} \left[\frac{1}{t-t_2} \cdot \left(\exp \left(\int_{t_2}^t k(x(u), u) du \right) - 1 \right) \cdot f(x(t)) \right], \quad t < \zeta \\ & + \frac{1}{t-t_2} \cdot \int_{t_2}^t \int_{\mathbb{R}^d} P(t_2, y; u, dz) L_u f(z) du \end{aligned}$$

für alle $t \in (t_2, t_2 + \delta)$ und alle $y \in \mathbb{R}^d$.

Für jeden Pfad $\omega \in C(I, \mathbb{R}^d \cup \{\omega_a\})$ mit $\omega(t_2) = y$ gilt $\zeta(\omega) > t_2$. Also ist ω in einer Umgebung von t_2 stetig und es gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow t_2} \left\{ \frac{1}{t-t_2} \cdot \left(\exp \left(\int_{t_2}^t k(x(u), u) du \right) - 1 \right) \cdot f(x(t)) \cdot 1_{t < \zeta} \right\} (\omega) \\ & = k(t_2, y) \cdot f(y). \end{aligned}$$

Ferner folgt aus der Beschränktheit der Funktion k , daß die Funktionen

$$t \rightarrow \left\{ \frac{1}{t-t_2} \cdot \left(\exp \left(\int_{t_2}^t k(x(u), u) du \right) - 1 \right) \cdot f(x(t)) \cdot 1_{t < \zeta} \right\} (\omega)$$

auf $(t_2, t_2 + \delta)$ für alle $\omega \in C(I, \mathbb{R}^d \cup \{\omega_a\})$ mit $\omega(t_2) = y$ gleichmäßig beschränkt sind. Aus dem Satz über die dominierte

Konvergenz von Lebesgue folgt:

$$\lim_{t \rightarrow t_2} E_{t_2, Y} \left[\frac{1}{t-t_2} \cdot \left(\exp \left(\int_{t_2}^t k(x(u), u) du \right) - 1 \right) \cdot f(x(t)) \right], t < \zeta$$

$$(7) = k(t_2, Y) \cdot f(Y)$$

für alle $Y \in \mathbb{R}^d$. Nach Hilfssatz 1 gilt:

$$\lim_{t \rightarrow t_2} \frac{1}{t-t_2} \cdot \int_{t_2}^t \int_{\mathbb{R}^d} P(t_2, Y; u, dz) L_u f(z) du$$

$$(8) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t_2, Y; t_2, dz) L_{t_2} f(z) = L_{t_2} f(Y)$$

für alle $Y \in \mathbb{R}^d$. Aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Funktionen $k(\cdot, u)$ und $L_u f$ für alle $u \in (t_2, t_2 + \delta)$ folgt, daß die Funktionen

$$Y \rightarrow E_{t_2, Y} \left[\frac{1}{t-t_2} \cdot \left(\exp \left(\int_{t_2}^t k(x(u), u) du \right) - 1 \right) \cdot f(x(t)) \right], t < \zeta$$

und

$$Y \rightarrow \frac{1}{t-t_2} \cdot \int_{t_2}^t \int_{\mathbb{R}^d} P(t_2, Y; u, dz) L_u f(z) du$$

gleichmäßig beschränkt sind für alle $t \in (t_2, t_2 + \delta)$. Aus (5), (6), (7), (8) folgt daher durch nochmalige Anwendung des Satzes über die dominierte Konvergenz von Lebesgue:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow t_2} \frac{1}{t-t_2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t, dy) f(Y) - \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t_2, dy) f(Y) \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t_2, dy) (k(t_2, Y) \cdot f(Y) + (L_{t_2} f)(Y)) \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Bedingung P4.).

Bemerkung 6: Sei $\{P(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ eine Familie von Maßen, die zu einer Familie $\{L_t\}$ von Differentialoperatoren assoziiert ist und die die Voraussetzungen von Hilfssatz 4 erfüllt. Seien k und l beschränkte und gleichmäßig stetige Funktionen von $\mathbb{R}^d \times I$ in $\mathbb{R}$. Mit Hilfe der Konstruktion

aus Hilfssatz 5 können wir Familien $\{P_k(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ und $\{P_{(k+1)}(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ von Maßen konstruieren, die zu $\{L_t + k(\cdot, t)\}$ bzw. $\{L_t + (k(\cdot, t) + l(\cdot, t))\}$ assoziiert sind. Wenn die Familie $\{P_k(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ wiederum die Voraussetzungen von Hilfssatz 4 erfüllt, erhalten wir durch die Anwendung der Konstruktion aus Hilfssatz 5 auf die Familie $\{P_k(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ und die Funktion l eine Familie $\{(P_k)_1(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ von Maßen, die ebenfalls zu $\{L_t + k(\cdot, t) + l(\cdot, t)\}$ assoziiert ist. Wir zeigen, daß gilt:

$$(P_k)_1(t_1, x; t_2, \cdot) = P_{(k+1)}(t_1, x; t_2, \cdot) \quad \text{für alle } t_1, t_2, x.$$

Seien $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ und ein $x \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Wir setzen $T := t_2 - t_1$. Die Wahrscheinlichkeitsmaße, die die mit Hilfe von Hilfssatz 4 aus den Familien

$\{P_k(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ bzw. $\{P(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ gewonnenen Prozesse beschreiben, bezeichnen wir mit $(P_k)_{t,x}$ bzw. $P_{t,x}$ für alle Startpunkte (t, x) . Für jede Funktion $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ gilt (vgl. den Beginn des Beweises von Hilfssatz 5):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} (P_k)_1(t_1, x; t_2, dy) f(y) \\ &= (E_k)_{t_1, x} \left[\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} l(x(t), t) dt\right) \cdot f(x(t_2)) \right], \quad t_2 < \zeta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (E_k)_{t_1, x} \left[\exp\left(\frac{T}{n} \cdot \sum_{i=1}^n l(x(t_1 + i \cdot \frac{T}{n}), t_1 + i \cdot \frac{T}{n})\right) \cdot f(x(t_2)) \right], \quad t_2 < \zeta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1, x; t_1 + \frac{T}{n}, dx_1) \{ \exp(\frac{T}{n} \cdot l(x_1, t_1 + \frac{T}{n})) \cdot \\ & \quad \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_1 + \frac{T}{n}, x_1; t_1 + 2 \cdot \frac{T}{n}, dx_2) \{ \exp(\frac{T}{n} \cdot l(x_2, t_1 + 2 \cdot \frac{T}{n})) \cdot \\ & \quad \dots \\ & \quad \int_{\mathbb{R}^d} P_k(t_2 - \frac{T}{n}, x_{n-1}; t_2, dy) \{ \exp(\frac{T}{n} \cdot l(y, t_2)) \cdot f(y) \} \dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} E_{t_1, x} \left[\prod_{i=1}^n \exp \left(\int_{t_1 + (i-1) \cdot \frac{T}{n}}^{t_1 + i \cdot \frac{T}{n}} k(x(t), t) dt \right) \right. \\
&\quad \cdot \exp \left(\frac{T}{n} \cdot \sum_{i=1}^n l(x(t_1 + i \cdot \frac{T}{n}), t_1 + i \cdot \frac{T}{n}) \cdot f(x(t_2)) \right), t_2 < \zeta \Big] \\
&= E_{t_1, x} \left[\exp \left(\int_{t_1}^{t_2} k(x(t), t) + l(x(t), t) dt \right) \cdot f(x(t_2)) \right], t_2 < \zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} P_{(k+l)}(t_1, x; t_2, dy) f(y) \quad .
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

1.4. Eindeutigkeit der Übergangsmaße

Wie in Abschnitt 1.3. setzen wir voraus, daß die Matrix $(a_{ij}(x, t))_{i,j=1}^d$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und alle $t \in I$ positiv definit ist. Wir zeigen, daß die zu der Familie $\{L_t\}$ assoziierte Familie von Übergangsmaßen eindeutig bestimmt ist. Dabei verwenden wir, daß die Bedingung (*) aus Hilfssatz 4 bereits aus L1.), L2.) und P1.) - P4.) folgt, wir werden dies jedoch erst in Folgerung 5.1 beweisen.

Sei zunächst $c = 0$ und $I = [0, \infty)$. Nach Bemerkung 4 sind die Übergangsmaße in diesem Fall Wahrscheinlichkeitsmaße.

Aus der Bedingung (*) und aus STROOCK/VARADHAN [3], Theorem 2.2.4 (oder aus Hilfssatz 4) folgt dann, daß es für jeden Startpunkt (s, x) ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{s,x}$ auf $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ gibt, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned}
&P_{s,x}(x(t) = x \text{ für alle } t \in [0, \infty) \text{ mit } t \leq s) = 1 \\
&\text{und} \\
&P_{s,x}(x(t_2) \in B \mid \mathcal{M}_{t_1}) = P(t_1, x(t_1); t_2, B) \quad P_{s,x}\text{-f.s.} \\
&\text{für alle } t_1, t_2 \in [0, \infty) \text{ mit } s \leq t_1 < t_2 \text{ und alle Borel-Mengen } B \subseteq \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{M}_{t_1}$ die kleinste σ -Algebra, für die die

Projektionsabbildungen $x(t)$ für alle $t \in I$ mit $t \leq t_1$ meßbar sind. Aus P4.) folgt mit Hilfe des Satzes von Fubini (vgl. Formel (1) in Abschnitt 1.3.), daß $P_{s,x}$ eine Lösung des Martingalproblems für $\{L_t\}$ zum Startpunkt (s, x) ist (siehe Definition 2). Da die Lösung des Martingalproblems nach STROOCK/VARADHAN [3], Theorem 7.2.1 eindeutig bestimmt ist, sind auch die Übergangsmaße $P(s, x; t_2, \cdot)$ für alle $t_2 \in I$ mit $t_2 \geq s$ eindeutig bestimmt.

Die Eindeutigkeit der Übergangsmaße im Fall $c = 0$ und $I = [0, t_b]$ für eine nichtnegative Zahl t_b können wir auf den bisher behandelten Fall zurückführen, indem wir die Familie $\{L_t\}_{t \in I}$ und die dazu assoziierte Familie $\{P(t_1, x; t_2, \cdot)\}_{t_1, t_2 \in I, t_1 \leq t_2; x \in \mathbb{R}^d}$ zu einer Familie $\{\tilde{L}_t\}_{t \in [0, \infty)}$ und einer dazu assoziierten Familie $\{\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)\}_{t_1, t_2 \in [0, \infty), t_1 \leq t_2; x \in \mathbb{R}^d}$ erweitern. Da die Eindeutigkeit der Übergangsmaße in der Arbeit nicht angewendet wird, beschränken wir uns auf eine Beweisskizze. Wir setzen $\tilde{L}_t := L_t$ für $t \in [0, t_b]$ und $\tilde{L}_t := L_{t_b}$ für $t > t_b$. Sei $\{\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)\}_{t_1, t_2 \in [t_b, \infty), t_1 \leq t_2; x \in \mathbb{R}^d}$ eine Familie von Maßen, die zu der Familie $\{\tilde{L}_t\}_{t \in [t_b, \infty)}$ assoziiert ist. Wir definieren für alle $x \in \mathbb{R}^d$:

$\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot) := P(t_1, x; t_2, \cdot)$ für alle t_1, t_2 mit $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_b$ und

$\tilde{P}(t_1, x; t_2, B) := \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_b, dy) \tilde{P}(t_b, y; t_2, B)$ für alle Borel-Mengen $B \subseteq \mathbb{R}^d$ und alle t_1, t_2 mit $0 \leq t_1 \leq t_b \leq t_2$.

Die Bedingungen P1.) - P4.) lassen sich unmittelbar nachprüfen (beim Beweis der Bedingung P2.)c) wird der Satz über die dominierte Konvergenz von Lebesgue und beim Beweis der Bedingung P4.) der Satz von Fubini angewendet).

Der Fall $c = 0$ und I ein Intervall der Form $[t_a, \infty)$ oder $[t_a, t_b]$ für $t_a, t_b \in \mathbb{R}$ mit $t_a \leq t_b$ läßt sich wie in Abschnitt 1.3. auf einen der bisher betrachteten Fälle zurückführen.

Wir führen jetzt den Fall $c \leq 0$ und I beliebig auf den Fall $c = 0$ zurück. Sei die Familie $\{P(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ zu der Familie $\{L_t\}$ assoziiert. Dann folgt aus Hilfssatz 5, daß die Familie $\{P_{-c}(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ zu der Familie $\{L_t - c(\cdot, t)\}$ assoziiert ist. Das Glied 0. Ordnung des Differentialoperators $L_t - c(\cdot, t)$ ist identisch Null für jedes t aus I , also ist die Familie $\{P_{-c}(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ nach der bereits bewiesenen Eindeutigkeitsaussage eindeutig bestimmt. Nach Bemerkung 6 gilt:

$$\begin{aligned} P(t_1, x; t_2, \cdot) &= P_{(-c+c)}(t_1, x; t_2, \cdot) \\ &= (P_{-c})_c(t_1, x; t_2, \cdot) \quad \text{für alle } t_1, t_2, x. \end{aligned}$$

Wir können also die Familie $\{P(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ aus der Familie $\{P_{-c}(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ rekonstruieren. Hieraus folgt die Eindeutigkeit der Übergangsmaße im Fall $c \leq 0$.

Sei jetzt K eine beliebige Konstante. Dann ist die Familie $\{P(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ assoziiert zu der Familie $\{L_t\}$ genau dann, wenn die Familie $\{\exp(K \cdot (t_2 - t_1)) \cdot P(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ zu der Familie $\{L_t + K\}$ assoziiert ist (der Nachweis der Bedingungen P1.) - P3.) ist trivial, weiter folgt P4.) wegen Hilfssatz 1 durch Differentiation nach der Produktregel). Da die Funktion c nach L1.) beschränkt ist, läßt sich die Eindeutigkeit der Übergangsmaße im allgemeinen Fall auf die Eindeutigkeit der Übergangsmaße im Fall $c \leq 0$ zurückführen.

1.5. Darstellung von Lösungen parabolischer Differentialgleichungen durch Übergangswahrscheinlichkeiten

Da sich die Lösungen parabolischer Differentialgleichungen unter gewissen Voraussetzungen durch Übergangsmaße darstellen lassen, ergeben sich aus den später in der Arbeit bewiesenen Resultaten über Übergangsmaße entsprechende Resultate für gewisse parabolische Differentialgleichungen. Wir stellen das folgende Resultat aus STROOCK/VARADHAN [1], Abschnitt 11 bereit, das unter den generellen Voraussetzungen von Abschnitt 1.4. gilt:

STROOCK/VARADHAN [1] Folgerung 11.1: Sei f eine Funktion aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Sei u eine Funktion aus $W_p^{1,2}$ für $p > \frac{d+2}{2}$, die die folgende parabolische Differentialgleichung löst:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

für alle $t \in [t_1, t_2]$ mit dem Anfangswert

$$u(t_2, x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann gilt $u(t_1, x) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) f(y)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Dabei bezeichnet $W_p^{1,2}$ den Raum derjenigen Funktionen aus L^p , deren partielle Ableitungen bis zur 2. Ordnung nach den Raumkoordinaten und deren partielle Ableitung nach der Zeitkoordinate wieder in L^p liegen. Da wir die obige Folgerung nur zur Illustration benötigen, verweisen wir für die genauen Definitionen auf LADYZENSKAYA/SOLONNIKOV/URAL'TSEVA [1].

Wir nehmen jetzt an, daß die obige Differentialgleichung eine Fundamentallösung Γ besitzt, so daß die Funktion u mit

$$u(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(t, x; t_2, y) \cdot f(y) \, dy \quad \text{für alle } t, x$$

für jede Funktion $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und ein festes t_2 die Voraussetzungen der obigen Folgerung erfüllt. Dann folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(t, x; t_2, y) \cdot f(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^d} P(t, x; t_2, dy) f(y)$$

für jede Funktion $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und alle $t \in [t_1, t_2]$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Also gilt:

$$\Gamma(t, x; t_2, y) \, dy = P(t, x; t_2, dy) \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2], x \in \mathbb{R}^d.$$

1.6. Die Rückwärtsgleichung

In Umkehrung der Betrachtungen aus Abschnitt 1.5. zeigen wir in diesem Abschnitt, daß die Funktionen $(t, x) \rightarrow P^{t, t_0} f(x)$ für $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ und $t_0 \in I$ unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen der sogenannten Rückwärts- oder Kolmogorovgleichung genügen (vgl. z.B. STROOCK/VARADHAN [3], Kapitel 0.).

1.6.1. Zunächst setzen wir nur voraus, daß $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ gilt und daß die Funktionen $P^{t, t_0} f$ für alle $t \in I$ mit $t \leq t_0$ und ein festes $t_0 \in I$ gleichgradig gleichmäßig stetig sind. Wir zeigen, daß unter diesen Voraussetzungen die Funktionen

$$t \rightarrow P^{t, t_0} f(x) \quad \text{auf } I \cap (-\infty, t_0]$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gleichgradig gleichmäßig stetig sind. Wir merken an, daß $I \cap (-\infty, t_0]$ wegen der Voraussetzungen an I beschränkt ist.

Sei ϵ eine beliebige positive Zahl. Wir wählen eine positive Zahl δ , so daß gilt:

$$|P^{t_1, t_0}_{of}(y) - P^{t_2, t_0}_{of}(x)| < \varepsilon$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $|x - y| < \delta$ und alle $t \in I \cap (-\infty, t_0]$. Dann gilt für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2 \leq t_0$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} & |P^{t_1, t_0}_{of}(x) - P^{t_2, t_0}_{of}(x)| \\ \text{p3.)} & = |(\int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) P^{t_2, t_0}_{of}(y)) - P^{t_2, t_0}_{of}(x)| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) |P^{t_2, t_0}_{of}(y) - P^{t_2, t_0}_{of}(x)| \\ & \quad + |\int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) - 1| \cdot |P^{t_2, t_0}_{of}(x)| \\ & \leq \int_{U_\delta(x)} P(t_1, x; t_2, dy) \varepsilon \\ & \quad + \int_{U_\delta(x)} P(t_1, x; t_2, dy) 2 \cdot \|P^{t_2, t_0}_{of}\|_\infty \\ & \quad + |\int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) - 1| \cdot \|P^{t_2, t_0}_{of}\|_\infty. \end{aligned}$$

Wir setzen $C := \|c\|_\infty$ und $T := t_0 - t_a$ (t_a ist die untere Intervallgrenze von I). Dann erhalten wir mit Hilfe von Hilfssatz 2 aus der letzten Ungleichung, daß gilt:

$$\begin{aligned} & \sup \{ |P^{t_1, t_0}_{of}(x) - P^{t_2, t_0}_{of}(x)| \mid t_1, t_2 \in I \text{ mit } t_1 < t_2 < t_1 + \varepsilon, \\ & \quad x \in \mathbb{R}^d \} \\ & \leq \exp(C \cdot T) \cdot \varepsilon \\ & \quad + \sup \{ P(t_1, x; t_2, U_\delta(x)) \mid t_1, t_2 \in I \text{ mit } t_1 < t_2 < t_1 + \varepsilon, x \in \mathbb{R}^d \} \cdot \\ & \quad \cdot 2 \cdot \exp(C \cdot T) \cdot \|f\|_\infty \\ & \quad + (\exp(C \cdot \varepsilon) - 1) \cdot \exp(C \cdot T) \cdot \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus Hilfssatz 3.

1.6.2. Wir setzen jetzt voraus, daß $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ gilt und daß $P^{t,t_0} f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ gilt für alle $t \in I$ mit $t < t_0$ und ein festes $t_0 \in I$.

Sei t verschieden von der unteren Intervallgrenze von I . Dann folgt aus P3.) und P4.), daß für alle $s \in I$ mit $s < t$ gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t-s} \cdot (P^{t,t_0} f(x) - P^{s,t_0} f(x)) \\ \text{P3.)} &= \frac{1}{t-s} \cdot (P^{t,t_0} f(x) - P^{s,t} (P^{t,t_0} f)(x)) \\ \text{P4.)} &= \frac{1}{t-s} \cdot \left(- \int_s^t P^{s,u} (L_u P^{t,t_0} f)(x) du \right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Die Funktionen $L_u P^{t,t_0} f$ konvergieren für $u \uparrow t$ nach L1.) gleichmäßig gegen die stetige Funktion $L_t P^{t,t_0} f$. Somit folgt aus Hilfssatz 3, daß gilt:

$$\lim_{s \uparrow t} \frac{1}{t-s} \cdot (P^{t,t_0} f(x) - P^{s,t_0} f(x)) = - L_t (P^{t,t_0} f)(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Die Funktion $t \rightarrow P^{t,t_0} f(x)$ ist also linksseitig differenzierbar auf $I \cap (-\infty, t_0)$ und besitzt dort die linksseitige Ableitung $t \rightarrow - L_t (P^{t,t_0} f)(x)$.

1.6.3. Wir setzen jetzt zusätzlich zu den Voraussetzungen von Abschnitt 1.6.2. voraus, daß die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von $P^{t,t_0} f$ nach den Raumkoordinaten gleichmäßig beschränkt sind und stetig von t abhängen für $t \in I \cap (-\infty, t_0)$. Weiter sei $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$. Damit sind auch die Voraussetzungen von Abschnitt 1.6.1. erfüllt. Aus L1.) folgt, daß die Funktion $t \rightarrow L_t (P^{t,t_0} f)(x)$ auf $I \cap (-\infty, t_0)$ stetig ist für jedes $x \in \mathbb{R}^d$. Aus den Abschnitten 1.6.1. und 1.6.2. folgt daher, daß die Funktion $t \rightarrow P^{t,t_0} f(x)$ auf

$I \cap (-\infty, t_0)$ stetig differenzierbar ist für jedes $x \in \mathbb{R}^d$.

Die Funktion $(t, x) \rightarrow P^{t, t_0}_f(x)$ genügt also der sogenannten Rückwärts- oder Kolmogorovgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} P^{t, t_0}_f = -L_t P^{t, t_0}_f \quad \text{für } t \in I \cap (-\infty, t_0)$$

mit dem Anfangswert $P^{t_0, t_0}_f(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

2. Ein Vergleichslemma

Seien Familien $\{L_t\}_{t \in I}$ und $\{\tilde{L}_t\}_{t \in I}$ von Differentialoperatoren gegeben, die die Bedingungen L1.) und L2.) erfüllen.

Die Familien $\{P(t_1, x; t_2, \cdot)\}_{t_1, t_2 \in I; x \in \mathbb{R}^d}$ und $\{\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)\}_{t_1, t_2 \in I; x \in \mathbb{R}^d}$ von Übergangsmaßen seien zu $\{L_t\}$ bzw. $\{\tilde{L}_t\}$ assoziiert. Die Funktionen P^{t_1, t_2}_f wurden in Abschnitt 1.1. definiert, entsprechend seien die Funktionen $\tilde{P}^{t_1, t_2}_f$ definiert.

Satz 1 (Vergleichslemma): Seien eine Funktion f aus $C_b^1(\mathbb{R}^d)$ und t_1, t_2 aus I mit $t_1 < t_2$ gegeben, so daß die Funktion $\tilde{P}^{t_1, t_2}_f$ für jedes $t \in [t_1, t_2)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktionen $\tilde{P}^{t_1, t_2}_f$ seien gleichmäßig beschränkt für $t \in [t_1, t_2)$. Es gebe eine stetige summierbare Funktion φ auf $[t_1, t_2)$, so daß für alle i, j gilt:

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tilde{P}^{t_1, t_2}_f(x) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2), x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann gilt:

$$(P^{t_1, t_2}_f - \tilde{P}^{t_1, t_2}_f)(x) = \int_{t_1}^{t_2} P^{t_1, t}(L_t - \tilde{L}_t) \tilde{P}^{t, t_2}_f(x) dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^d$ fest. Wir definieren eine Funktion F auf $[t_1, t_2] \times [t_1, t_2]$ durch:

$$F(r, s) := P^{t_1, r} \tilde{P}^{s, t_2}_f(x) \quad \text{für alle } r, s \in [t_1, t_2].$$

Nach Voraussetzung gilt $\tilde{P}^{s, t_2}_f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ für jedes $s \in [t_1, t_2)$. Aus P4.) und Hilfssatz 1.1. folgt somit, daß F für jedes $s \in [t_1, t_2)$ nach r stetig partiell differenzierbar

bar ist und die partielle Ableitung $r \rightarrow P^{t_1, r} L_r \tilde{P}^{s, t_2} f(x)$ hat. Für $s = t_2$ ist F nach P2.) partiell stetig in r .

Aus $\tilde{P}^{s, t_2} f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ für jedes $s \in [t_1, t_2)$ und aus Abschnitt 1.6.2. folgt, daß die Funktion $s \rightarrow \tilde{P}^{s, t_2} f(y)$ auf (t_1, t_2) für jedes $y \in \mathbb{R}^d$ linksseitig differenzierbar ist und die linksseitige Ableitung $s \rightarrow -\tilde{L}_s \tilde{P}^{s, t_2} f(y)$

besitzt. Nach Voraussetzung sind diese Ableitungen auf jeder kompakten Teilmenge von (t_1, t_2) gleichmäßig beschränkt für alle $y \in \mathbb{R}^d$. Aus dem Anhang, Hilfssatz 1 folgt, daß die Funktionen $s \rightarrow \tilde{P}^{s, t_2} f(y)$ auf jeder kompakten Teilmenge von (t_1, t_2) gleichmäßig Lipschitz-stetig sind, die Lipschitz-Konstante kann dabei unabhängig von y gewählt werden. Folglich ist für jedes $s \in (t_1, t_2)$ die Menge der Differenzenquotienten

$$\frac{1}{s-u} \cdot (\tilde{P}^{s, t_2} f(y) - \tilde{P}^{u, t_2} f(y))$$

für alle $u \in [\frac{t_1+s}{2}, s)$ und alle $y \in \mathbb{R}^d$ beschränkt. Da $P(t_1, x; r, \cdot)$ für jedes r ein endliches Maß ist, folgt aus dem Satz über die dominierte Konvergenz von Lebesgue:

$$\begin{aligned} & \lim_{u \uparrow s} \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; r, dy) \frac{1}{s-u} \cdot (\tilde{P}^{s, t_2} f(y) - \tilde{P}^{u, t_2} f(y)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; r, dy) (-\tilde{L}_s) \tilde{P}^{s, t_2} f(y) \end{aligned}$$

für alle $r \in [t_1, t_2]$ und $s \in (t_1, t_2)$. Wir erhalten, daß die Funktion F auf $[t_1, t_2] \times (t_1, t_2)$ nach s linksseitig partiell differenzierbar ist und die folgende linksseitige partielle Ableitung hat:

$$s \rightarrow P^{t_1, r} (-\tilde{L}_s) \tilde{P}^{s, t_2} f(x) \quad .$$

Aus Abschnitt 1.6.1. folgt, daß die Funktionen $s \rightarrow \tilde{P}^{s,t_2}(y)$ auf $[t_1, t_2]$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ gleichgradig gleichmäßig stetig sind, ferner sind diese Funktionen nach Hilfssatz 1.2 gleichmäßig beschränkt. Also sind auch die Funktionen

$$s \rightarrow F(r, s) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; r, dy) \tilde{P}^{s,t_2}_f(y) \quad \text{auf } [t_1, t_2]$$

für alle $r \in [t_1, t_2]$ gleichgradig gleichmäßig stetig. Da die Funktion F für jedes feste s partiell stetig in r ist, folgt, daß die Funktion F in beiden Veränderlichen gemeinsam stetig ist.

Wir definieren die Funktion D auf $[t_1, t_2]$ durch

$D(r) := F(r, r)$ für alle $r \in [t_1, t_2]$. Dann ist die Funktion

D im gesamten Definitionsbereich stetig. Seien

$s_1, s_2 \in (t_1, t_2)$ mit $s_1 < s_2$. Für jede positive Zahl h mit $t_1 < s_1 - h$ und $s_2 + h < t_2$ gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{h} \cdot (F(t+h, t) - F(t, t)) + \frac{1}{h} \cdot (F(t, t) - F(t, t-h)) dt \\ (1) \quad &= \frac{1}{h} \cdot \left(\int_{s_1}^{s_2} F(t+h, t) dt - \int_{s_1}^{s_2} F(t, t-h) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \cdot \int_{s_2}^{s_2+h} F(t, t-h) dt - \frac{1}{h} \cdot \int_{s_1}^{s_1+h} F(t, t-h) dt \quad . \end{aligned}$$

Da die partielle Ableitung der Funktion F nach r und die linksseitige partielle Ableitung der Funktion F nach s auf jeder kompakten Teilmenge von $(t_1, t_2) \times (t_1, t_2)$ gleichmäßig beschränkt sind, folgt aus dem Anhang, Hilfssatz 1, daß die Funktion F auf jeder kompakten Teilmenge von

$(t_1, t_2) \times (t_1, t_2)$ in Bezug auf beide Veränderliche gleichmäßig Lipschitz-stetig ist. Wir können also aus dem Satz über die dominierte Konvergenz von Lebesgue schließen, daß gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{h} \cdot (F(t+h, t) - F(t, t)) + \frac{1}{h} \cdot (F(t, t) - F(t, t-h)) dt \\ = \int_{s_1}^{s_2} p^{t_1, t}_{L_t} \tilde{p}^{t, t_2}_f(x) + p^{t_1, t} (-\tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, t_2}_f(x) dt. \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus der Stetigkeit der Funktion F :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \int_{s_2}^{s_2+h} F(t, t-h) dt - \frac{1}{h} \cdot \int_{s_1}^{s_1+h} F(t, t-h) dt \right) \\ = F(s_2, s_2) - F(s_1, s_1) \\ = D(s_2) - D(s_1) \end{aligned}$$

Aus (1) folgt somit:

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} p^{t_1, t}_{L_t} \tilde{p}^{t, t_2}_f(x) + p^{t_1, t} (-\tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, t_2}_f(x) dt \\ = D(s_2) - D(s_1) \end{aligned}$$

für alle $s_1, s_2 \in (t_1, t_2)$ mit $s_1 < s_2$. Also stimmt die Einschränkung der Funktion D auf (t_1, t_2) bis auf eine additive Konstante mit dem unbestimmten Lebesgue-Integral der folgenden Funktion überein:

$$t \rightarrow p^{t_1, t}_{L_t} \tilde{p}^{t, t_2}_f(x) + p^{t_1, t} (-\tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, t_2}_f(x) .$$

Da φ summierbar ist, ist die obige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[t_1, t_2]$ summierbar. Da die Funktion D in den Randpunkten des Intervalls $[t_1, t_2]$ stetig ist, folgt, daß D absolutstetig ist. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} D(t_2) - D(t_1) \\ = \int_{t_1}^{t_2} p^{t_1, t}_{L_t} \tilde{p}^{t, t_2}_f(x) + p^{t_1, t} (-\tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, t_2}_f(x) dt. \end{aligned}$$

Nach Definition ist jedoch:

$$\begin{aligned} D(t_1) &= F(t_1, t_1) = P^{t_1, t_1} \tilde{P}^{t_1, t_2}_f(x) = \tilde{P}^{t_1, t_2}_f(x), \\ D(t_2) &= F(t_2, t_2) = P^{t_1, t_2} \tilde{P}^{t_2, t_2}_f(x) = P^{t_1, t_2}_f(x). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Bemerkung 1: Sei $\tilde{L}_t$ für jedes $t \in I$ der Nulloperator und sei $\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot) := \delta_x$ für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$ (δ_x bezeichnet das Punktmaß mit der Masse 1 im Punkt x , siehe die Liste der Bezeichnungen). Die Familie der Maße $\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)$ ist zu der Familie $\{\tilde{L}_t\}$ assoziiert und die Voraussetzungen von Satz 1 sind für jede Funktion $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ und alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$ erfüllt. Die Behauptung des Satzes stimmt in diesem Fall mit der Bedingung P4.) an die Familie $\{P(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ und die Familie $\{L_t\}$ überein. Satz 1 kann also als Verallgemeinerung der Bedingung P4.) angesehen werden.

Das nachstehende Eindeutigkeitsresultat folgt unmittelbar aus Satz 1.

Folgerung 1: Sei t_2 aus I gegeben, so daß die Funktion $\tilde{P}^{t, t_2}_f$ zweimal stetig differenzierbar ist für jede Funktion $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und alle $t \in I$ mit $t \leq t_2$. Ferner seien für jede Funktion $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ die Ableitungen von $\tilde{P}^{t, t_2}_f$ bis zur zweiten Ordnung gleichmäßig beschränkt für alle $t \in I$.

Dann folgt aus $L_t = \tilde{L}_t$ für alle $t \in I$, daß gilt:

$$P(t, x; t_2, \cdot) = \tilde{P}(t, x; t_2, \cdot) \quad \text{für alle } t \in I \text{ mit } t \leq t_2, \text{ alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Diese Folgerung läßt sich auch aus STROOCK/VARADHAN [3], Theorem 6.3.2 herleiten. Die Voraussetzungen der Folgerung

sind insbesondere erfüllt, wenn $\tilde{L}_t = \frac{\Delta}{2}$ ist für alle $t \in I$ und wenn die Maße $\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)$ mit den entsprechenden Übergangsmaßen der Brownschen Bewegung übereinstimmen. Wir erhalten somit aus Folgerung 1 das bekannte Resultat, daß die Brownsche Bewegung der einzige Diffusionsprozeß mit dem infinitesimalen Erzeuger $\frac{\Delta}{2}$ ist (siehe z.B. STROOCK/VARADHAN [3], Abschnitt 4.1.).

Die nachstehende Majorisierungsaussage folgt ebenfalls unmittelbar aus Satz 1.

Folgerung 2: Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes gelte:

$$L_t \tilde{P}^{t, t_2}_f \leq \tilde{L}_t \tilde{P}^{t, t_2}_f \quad \text{für alle } t \in (t_1, t_2)$$

$$(\text{oder } L_t \tilde{P}^{t, t_2}_f \geq \tilde{L}_t \tilde{P}^{t, t_2}_f \quad \text{für alle } t \in (t_1, t_2)).$$

Dann folgt: $P^{t_1, t_2}_f \leq \tilde{P}^{t_1, t_2}_f$ (bzw. $P^{t_1, t_2}_f \geq \tilde{P}^{t_1, t_2}_f$).

Bemerkung 2: Unter der stärkeren Voraussetzung, daß die Funktionen P^{t, t_2}_f und $\tilde{P}^{t, t_2}_f$ für alle $t \in [t_1, t_2]$ zweimal stetig differenzierbar sind und daß die Ableitungen bis zur zweiten Ordnung gleichmäßig beschränkt und stetig bezüglich t sind für alle $t \in [t_1, t_2]$, läßt sich die Behauptung von Folgerung 2 auch aus dem Maximumprinzip für parabolische Differentialgleichungen herleiten. Wir zeigen dies hier nur für $c = 0$ und $\tilde{c} = 0$.

Sei $L_t \tilde{P}^{t, t_2}_f \leq \tilde{L}_t \tilde{P}^{t, t_2}_f$ für alle $t \in [t_1, t_2]$. Aus

Abschnitt 1.6.3. folgt:

$$\frac{\partial \tilde{P}^{t, t_2}_f}{\partial t} = - \tilde{L}_t \tilde{P}^{t, t_2}_f \quad \text{und} \quad \frac{\partial P^{t, t_2}_f}{\partial t} = - L_t P^{t, t_2}_f$$

für alle $t \in [t_1, t_2]$. Wir definieren eine Funktion F auf $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}^d$ durch:

$$F(t, x) := (\tilde{P}^{t, t_2}_f - P^{t, t_2}_f)(x) \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2], x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann folgt aus der Voraussetzung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + L_t F &= (-\tilde{Y}_t \tilde{P}^{t, t_2}_f + L_t P^{t, t_2}_f) \\ &\quad + (L_t \tilde{P}^{t, t_2}_f - L_t P^{t, t_2}_f) \\ &= -\tilde{L}_t \tilde{P}^{t, t_2}_f + L_t P^{t, t_2}_f \leq 0 \end{aligned}$$

für alle $t \in [t_1, t_2]$. Ferner ist F nach Abschnitt

1.6.1. stetig in t und es gilt $\lim_{t \uparrow t_2} F(t, x) = 0$. Aus dem

Maximumprinzip für parabolische Differentialgleichungen in

der Form von STROOCK/VARADHAN [3], Theorem 3.1.1 folgt

$F(t, x) \geq 0$ für alle t und x . Wenn wir die Definition

von F in diese Ungleichung einsetzen, erhalten wir für

$t = t_1$ den ersten Teil der Behauptung von Folgerung 2.

Der zweite Teil der Behauptung von Folgerung 2 läßt sich

analog beweisen.

3. Majorisierungen für Übergangsmaße

Seien eine Familie $\{P(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ von Übergangsmaßen, die zu einer Familie $\{L_t\}$ von Differentialoperatoren assoziiert ist und $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ gegeben. Wir konstruieren reelle Funktionen auf $\mathbb{R}^d$, die in Bezug auf die Maße $P(t_1, x; t_2, \cdot)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ summierbar sind.

Wir übernehmen die Bezeichnungen und Voraussetzungen von Abschnitt 2 und setzen zusätzlich voraus, daß die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ für jedes $t \in I$ von den Raumkoordinaten unabhängig sind. Wir können daher die Koeffizienten der Familie $\{\tilde{L}_t\}$ als Funktionen von I in $\mathbb{R}$ schreiben. Unter dieser zusätzlichen Voraussetzung kann man die zu der Familie $\{\tilde{L}_t\}$ assoziierte Familie $\{\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ von Übergangsmaßen explizit angeben. Für $c = 0$ findet man eine entsprechende Darstellung (jedoch ohne Beweis) in STROOCK/VARADHAN [3], Abschnitt 7.0. Aus Gründen der Vollständigkeit beweisen wir daher den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 1: Die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ seien für jedes t aus I von den Raumkoordinaten unabhängig.

Seien $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ gegeben. Wir definieren die Matrix $\tilde{A}_{t_1, t_2}$, den Vektor $\tilde{B}_{t_1, t_2}$ und den Skalar $\tilde{C}_{t_1, t_2}$ durch

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{t_1, t_2} &:= \left(\int_{t_1}^{t_2} \tilde{a}_{ij}(t) dt \right)_{i,j=1}^d, \\ \tilde{B}_{t_1, t_2} &:= \left(\int_{t_1}^{t_2} \tilde{b}_i(t) dt \right)_{i=1}^d \quad \text{und} \\ \tilde{C}_{t_1, t_2} &:= \int_{t_1}^{t_2} \tilde{c}(t) dt.\end{aligned}$$

Die Indizes t_1, t_2 werden im folgenden oft weggelassen.

Sei R der Bildbereich von $\tilde{A}$ und sei d_R die Dimension von R . Sei zunächst $d_R > 0$. Wir definieren die Funktion $\tilde{K}_{t_1, t_2}$ auf dem affinen Raum $\tilde{B} + R$ durch:

$$\tilde{K}_{t_1, t_2}(z) := k \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot ((\tilde{A}|_R)^{-1}(z - \tilde{B}), z - \tilde{B}) + \tilde{C}\right)$$

mit dem Normierungsfaktor $k := ((2 \cdot \pi)^{d_R} \cdot \det \tilde{A}|_R)^{-1/2}$ für alle z aus $\tilde{B} + R$.

Dann ist $\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)$ dasjenige Borel-Maß auf $\mathbb{R}^d$, das den Träger $x + \tilde{B}_{t_1, t_2} + R$ hat und das in Bezug auf das d_R -dimensionale Lebesgue-Maß auf seinem Träger die Dichte

$\tau_x \tilde{K}_{t_1, t_2}$ besitzt. Im Fall $d_R = 0$ ist $\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)$ das Punktmaß $\exp(\tilde{C}_{t_1, t_2}) \cdot \delta_{x + \tilde{B}_{t_1, t_2}}$.

Rechtfertigung: Aus $\tilde{A}$ symmetrisch folgt $\ker \tilde{A} = R^\perp$. Also ist $\tilde{A}|_R$ invertierbar. Für $z \in \tilde{B} + R$ gilt $z - \tilde{B} \in R$, somit ist $(\tilde{A}|_R)^{-1}(z - \tilde{B})$ definiert.

Der folgende Beweis ist etwas langwierig. Er hat jedoch den Vorteil, daß keine Sätze über parabolische Differentialgleichungen verwendet werden. Es wäre auch möglich, den Hilfssatz zu beweisen, indem man zeigt, daß für die oben konstruierten Maße eine Rückwärtsgleichung gilt, und anschließend eine Version des Vergleichslemmas aus Abschnitt 2 anwendet.

Beweis: Wir bezeichnen mit $\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)$ für beliebige t_1, t_2 und x dasjenige Borel-Maß auf $\mathbb{R}^d$, das den Träger $x + \tilde{B}_{t_1, t_2} + R$ hat und das in Bezug auf das d_R -dimensionale Lebesgue-Maß auf seinem Träger die Dichte $\tau_x \tilde{K}_{t_1, t_2}$ besitzt. Um zu zeigen, daß die Familien $\{\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ und

$\{\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ übereinstimmen, zeigen wir zunächst, daß die Familie $\{\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ zu der Familie $\{\tilde{L}_t\}$ assoziiert ist. Die Bedingungen P1.) und P2.) sind offensichtlich erfüllt.

Wir beweisen die Bedingung P4.) zunächst unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Matrix $(\tilde{a}_{ij}(t))$ für alle t aus I positiv definit ist. Wegen Hilfssatz 1.1 genügt es zu zeigen, daß für alle Funktionen f aus $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{P}(t_1, x; t_2, dz) f(z) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{P}(t_1, x; t_2, dz) \tilde{L}_{t_2} f(z) .$$

Wenn wir die Definition von $\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)$ einsetzen, können wir die letzte Gleichung wie folgt schreiben (wegen $(\tilde{a}_{ij}(t))$ positiv definit gilt $R = R^d$):

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \tau_x \tilde{K}_{t_1, t_2}(z) \cdot f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^d} \tau_x \tilde{K}_{t_1, t_2}(z) \cdot \tilde{L}_{t_2} f(z) dz .$$

Wir substituieren $y := z - \tilde{B} - x$ und gelangen somit zu der folgenden äquivalenten Aussage:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_2} \int_{\mathbb{R}^d} k \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\tilde{A}^{-1} y, y) + \tilde{C}\right) \cdot f(y + \tilde{B} + x) dy \\ (1) \quad & = \int_{\mathbb{R}^d} k \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\tilde{A}^{-1} y, y) + \tilde{C}\right) \cdot \tilde{L}_{t_2} f(y + \tilde{B} + x) dy \end{aligned}$$

(k wurde in der Formulierung des Hilfssatzes definiert). Wir berechnen die linke Seite von (1) mit Hilfe der Produktregel für die Differentiation. Aus den Anhängen 2.5. und 2.4. erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_2} \det(\tilde{A}_{t_1, t_2}) &= \text{trace}((\tilde{a}_{ij}(t_2)) \cdot \tilde{A}_{t_1, t_2}^{-1}) \cdot \det(\tilde{A}_{t_1, t_2}) , \\ \frac{\partial}{\partial t_2} (\tilde{A}_{t_1, t_2}^{-1} y, y) &= -((\tilde{a}_{ij}(t_2))_{i,j} \tilde{A}_{t_1, t_2}^{-1} y, \tilde{A}_{t_1, t_2}^{-1} y) . \end{aligned}$$

Weiter gelten:

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \tilde{C}_{t_1, t_2} = \tilde{C}(t_2) \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} f(y + \tilde{B}_{t_1, t_2} + x) = \left(\sum_{i=1}^d \tilde{b}_i(t_2) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (y + \tilde{B}_{t_1, t_2} + x)$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_2} \int_{\mathbb{R}} k \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\tilde{A}^{-1}_{y, y} + \tilde{C}) \cdot f(y + \tilde{B} + x) dy \right. \\ (2) = & \int_{\mathbb{R}} \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \text{trace}((\tilde{a}_{1j}(t_2)) \cdot \tilde{A}^{-1}) + \frac{1}{2} \cdot ((\tilde{a}_{1j}(t_2)) \tilde{A}^{-1}_y, \tilde{A}^{-1}_y) \right\} \\ & \cdot \{k \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\tilde{A}^{-1}_{y, y} + \tilde{C})\right) \cdot f(y + \tilde{B} + x) dy \\ & + \int_{\mathbb{R}} \{k \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\tilde{A}^{-1}_{y, y} + \tilde{C})\right) \\ & \cdot \left\{ \sum_{i=1}^d \tilde{b}_i(t_2) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + \tilde{C}(t_2) \cdot f \right\} (y + \tilde{B} + x) dy \quad . \end{aligned}$$

Den ersten Summanden auf der rechten Seite dieser Gleichung können wir wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \text{trace}((\tilde{a}_{1j}(t_2)) \cdot \tilde{A}^{-1}) + \frac{1}{2} \cdot ((\tilde{a}_{1j}(t_2)) \tilde{A}^{-1}_y, \tilde{A}^{-1}_y) \right\} \\ & \cdot \{k \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\tilde{A}^{-1}_{y, y} + \tilde{C})\right) \cdot f(y + \tilde{B} + x) dy \\ & = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} \tilde{a}_{1j}(t_2) \cdot \int_{\mathbb{R}} \{-(\tilde{A}^{-1})_{1j} + (\tilde{A}^{-1}_y)_1 \cdot (\tilde{A}^{-1}_y)_j\} \\ & \quad \cdot \{k \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\tilde{A}^{-1}_{y, y} + \tilde{C})\right) \cdot f(y + \tilde{B} + x) dy \\ & = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} \tilde{a}_{1j}(t_2) \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \{k \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\tilde{A}^{-1} \dots + \tilde{C})\right) (y) \cdot f(y + \tilde{B} + x) dy \\ & = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} \tilde{a}_{1j}(t_2) \cdot \int_{\mathbb{R}} k \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\tilde{A}^{-1} \dots + \tilde{C})\right) (y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (y + \tilde{B} + x) dy \\ & = \int_{\mathbb{R}} k \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\tilde{A}^{-1}_{y, y} + \tilde{C})\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} \tilde{a}_{1j}(t_2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (y + \tilde{B} + x) dy. \end{aligned}$$

Wenn wir dies in (2) einsetzen, erhalten wir (1). Damit ist

die Bedingung P4.) unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Matrix $(\tilde{a}_{ij}(t))$ für alle t aus I positiv definit ist, bewiesen.

Sei jetzt $\{\tilde{L}_t\}$ eine beliebige Familie von Differentialoperatoren, die die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt. Wir führen den Beweis der Bedingung P4.) auf den bereits bewiesenen Spezialfall zurück. Dazu definieren wir Funktionen

$\tilde{K}_{t_1, t_2}^{(n)}$ für $n \in \mathbb{N}$ analog zu $\tilde{K}_{t_1, t_2}$, dabei soll jedoch die positiv semidefinite Matrix $(\tilde{a}_{ij}(t))_{i,j}$ für jedes t aus I und n aus $\mathbb{N}$ durch die positiv definite Matrix $(\tilde{a}_{ij}(t))_{i,j} + \frac{1}{n} \cdot \mathbb{1}$ ersetzt werden. Sei $\tilde{P}^{(n)}(t_1, x; t_2, \cdot)$ dasjenige Borel-Maß auf $\mathbb{R}^d$, das in Bezug auf das Lebesgue-Maß die Dichte $\tau_x \tilde{K}_{t_1, t_2}^{(n)}$ hat. Aus der Bedingung P4.) im bereits bewiesenen Spezialfall folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{P}^{(n)}(t_1, x; t_2, dy) f(y) = f(x) \\ (3) \quad & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{P}^{(n)}(t_1, x; t, dy) (\tilde{L}_t + \frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta}{2}) f(y) dt \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Seien $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$ und $x \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Dann konvergiert die Folge der Maße $\tilde{P}^{(n)}(t_1, x; t, \cdot)$ für $n \rightarrow \infty$ und ein beliebiges $t \in (t_1, t_2]$ schwach gegen das Maß $\tilde{P}(t_1, x; t, \cdot)$. Insbesondere gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{P}^{(n)}(t_1, x; t_2, dy) f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{P}(t_1, x; t_2, dy) f(y).$$

Da f in $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ liegt, konvergiert die Folge der Funktionen $(\tilde{L}_t + \frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta}{2})f$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die Funktion $\tilde{L}_t f$. Somit gilt auch:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{P}^{(n)}(t_1, x; t, dy) (\tilde{L}_t + \frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta}{2}) f(y) \\ & = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{P}(t_1, x; t, dy) \tilde{L}_t f(y) \end{aligned}$$

für alle $t \in (t_1, t_2]$. Die Funktionen

$$t \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \tilde{P}^{(n)}(t_1, x; t, dy) \left(\tilde{L}_t + \frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta}{2} \right) f(y) \quad \text{auf} \quad (t_1, t_2]$$

sind gleichmäßig beschränkt für alle n aus $\mathbb{N}$. Aus dem Satz über die dominierte Konvergenz von Lebesgue folgt:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \int_{\mathbb{R}} \tilde{P}^{(n)}(t_1, x; t, dy) \left(\tilde{L}_t + \frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta}{2} \right) f(y) dt \\ &= \int_{t_1}^t \int_{\mathbb{R}} \tilde{P}(t_1, x; t, dy) \tilde{L}_t f(y) dt \end{aligned}$$

Die Bedingung P4.) im allgemeinen Fall folgt daher durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ aus der Gleichung (3).

Zum Beweis der Bedingung P3.) genügt es zu zeigen, daß für alle $t_1, t_2, t_3 \in I$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ gilt:

$$(4) \quad \tilde{P}(t_1, 0; t_2, \cdot) * \tilde{P}(t_2, 0; t_3, \cdot) = \tilde{P}(t_1, 0; t_3, \cdot)$$

Wir zeigen dies zunächst unter den zusätzlichen Voraussetzungen $(\tilde{a}_{ij}(t))_{i,j}$ positiv definit, $(\tilde{b}_i(t))_i = 0$ und $\tilde{c}(t) = 0$ für alle t aus I . Aus $\tilde{c} = 0$ folgt nach Bemerkung 1.4, daß die Maße $\tilde{P}(t_p, 0; t_q, \cdot)$ für $p, q = 1, 2, 3$ mit $p < q$ Wahrscheinlichkeitsmaße sind. Daher genügt es zu zeigen, daß die Dichte $\tilde{K}_{t_1, t_3}$ bis auf einen konstanten Faktor mit der Funktion $\tilde{K}_{t_1, t_2} * \tilde{K}_{t_2, t_3}$ übereinstimmt. Für eine geeignete Konstante k_0 gilt:

$$\begin{aligned} & (\tilde{K}_{t_1, t_2} * \tilde{K}_{t_2, t_3})(x) \\ (5) \quad &= k_0 \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\tilde{A}_{t_1, t_2}^{-1} y, y)\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\tilde{A}_{t_2, t_3}^{-1} (x-y), x-y)\right) dy \\ &= k_0 \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot ((\tilde{A}_{t_1, t_2}^{-1} y, y) + (\tilde{A}_{t_2, t_3}^{-1} (x-y), x-y))\right) dy \end{aligned}$$

für alle x aus $\mathbb{R}^d$. Wir setzen $U := \tilde{A}_{t_1, t_2}^{-1}$ und $V := \tilde{A}_{t_2, t_3}^{-1}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & (\tilde{A}_{t_1, t_2}^{-1} y, y) + (\tilde{A}_{t_2, t_3}^{-1} (x-y), x-y) \\ &= (U y, y) + (V (x - y), x - y) \\ &= ((U + V) y, y) - 2 \cdot (V x, y) + (V x, x) \\ &= ((U + V) (y - (U + V)^{-1} V x), y - (U + V)^{-1} V x) \\ &\quad - (V \cdot (U + V)^{-1} \cdot V x, x) + (V x, x) \end{aligned}$$

($U + V$ ist positiv definit und daher invertierbar). Wenn wir $z := (U + V)^{-1} V x$ setzen, erhalten wir mit Hilfe von Anhang 2.3.:

$$\begin{aligned} & (\tilde{A}_{t_1, t_2}^{-1} y, y) + (\tilde{A}_{t_2, t_3}^{-1} (x-y), x-y) \\ &= ((U + V) (y - z), y - z) + ((U^{-1} + V^{-1})^{-1} x, x). \end{aligned}$$

Nach Definition ist $U = \tilde{A}_{t_1, t_2}^{-1}$ und $V = \tilde{A}_{t_2, t_3}^{-1}$. Es folgt $(U^{-1} + V^{-1})^{-1} = (\tilde{A}_{t_1, t_2} + \tilde{A}_{t_2, t_3})^{-1} = \tilde{A}_{t_1, t_3}^{-1}$.

Wir erhalten schließlich:

$$\begin{aligned} & (\tilde{A}_{t_1, t_2}^{-1} y, y) + (\tilde{A}_{t_2, t_3}^{-1} (x-y), x-y) \\ &= (\tilde{A}_{t_1, t_3}^{-1} x, x) + ((U + V) (y - z), y - z). \end{aligned}$$

Dabei ist z nach Definition von y unabhängig. Wir setzen die letzte Gleichung in (5) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} & (\tilde{K}_{t_1, t_2} * \tilde{K}_{t_2, t_3})(x) \\ &= k_0 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\tilde{A}_{t_1, t_3}^{-1} x, x)\right) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot ((U+V)(y-z), y-z)\right) dy. \end{aligned}$$

Wenn wir im letzten Integral $y - z$ durch y substituieren, sehen wir, daß der Wert des Integrals nicht von z und damit auch nicht von x abhängt. Es folgt, daß die Funktion

$\tilde{K}_{t_1, t_2} * \tilde{K}_{t_2, t_3}$ bis auf einen konstanten Faktor mit der Funktion $\tilde{K}_{t_1, t_3}$ übereinstimmt. Aus den Bemerkungen zu Beginn des Beweises der Bedingung P3.) folgt somit, daß die Bedingung P3.) unter den Voraussetzungen $(\tilde{a}_{ij}(t))_{i,j}$ positiv definit, $(\tilde{b}_i(t))_i = \vec{0}$ und $c(t) = 0$ für alle t aus I erfüllt ist.

Wir führen jetzt den Fall $(\tilde{a}_{ij}(t))_{i,j}$ positiv semidefinit, $(\tilde{b}_i(t))_i = \vec{0}$ und $\tilde{c}(t) = 0$ für alle t aus I auf den bereits behandelten Spezialfall zurück. Wie beim Beweis der Bedingung P4.) ersetzen wir die positiv semidefiniten Matrizen $(\tilde{a}_{ij}(t))_{i,j}$ für alle t aus I durch die positiv definiten Matrizen $(\tilde{a}_{ij}(t))_{i,j} + \frac{1}{n} \cdot \mathbb{1}$ und definieren so die Maße $\tilde{P}^{(n)}(t_p, x; t_q, \cdot)$. Aus der Bedingung P3.) im bereits behandelten Spezialfall folgt:

$$(6) \quad \tilde{P}^{(n)}(t_1, 0; t_2, \cdot) * \tilde{P}^{(n)}(t_2, 0; t_3, \cdot) = \tilde{P}^{(n)}(t_1, 0; t_3, \cdot)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge der Maße $\tilde{P}^{(n)}(t_p, 0; t_q, \cdot)$ für $n \rightarrow \infty$ schwach gegen das Maß $\tilde{P}(t_p, 0; t_q, \cdot)$ konvergiert für beliebige $p, q = 1, 2, 3$ mit $p < q$, erhalten wir aus (6) durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ wieder die Gleichung (4). Somit ist die Bedingung P3.) auch in diesem Fall erfüllt.

Für beliebige $(\tilde{b}_i(\cdot))_i$ und $\tilde{c}(\cdot)$ erhält man die Maße $\tilde{P}(t_p, 0; t_q, \cdot)$ durch eine Verschiebung um den Vektor $\tilde{b}_{t_p, t_q}$ und eine Multiplikation mit dem skalaren Faktor $\exp(\tilde{c}_{t_p, t_q})$ aus den bisher betrachteten Maßen. Aus

$$\tilde{B}_{t_1, t_3} = \tilde{B}_{t_1, t_2} + \tilde{B}_{t_2, t_3} \quad \text{und}$$

$$\tilde{C}_{t_1, t_3} = \tilde{C}_{t_1, t_2} + \tilde{C}_{t_2, t_3}$$

folgt daher, daß sich der Beweis der Bedingung P3.) im allgemeinen Fall auf den bisher behandelten Spezialfall zurückführen läßt.

Wir haben somit gezeigt, daß die Familie $\{\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ zu der Familie $\{\tilde{L}_t\}$ assoziiert ist. Seien eine beliebige Funktion $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ und t_1, t_2 aus I mit $t_1 \leq t_2$ gegeben. Aus der Konstruktion der Maße $\tilde{P}(t, x; t_2, \cdot)$ folgt, daß die Funktionen $x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{P}(t, x; t_2, dy) f(y)$ für alle $t \in [t_1, t_2]$ zweimal stetig differenzierbar sind und daß die partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung gleichmäßig beschränkt sind für alle $t \in [t_1, t_2]$. Aus Folgerung 2.1. folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{P}(t_1, x; t_2, dy) f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{P}(t_1, x; t_2, dy) f(y)$$

für alle $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ und alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Hieraus folgt die Behauptung.

Folgerung 1: Die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ seien für jedes t aus I von den Raumkoordinaten unabhängig. Sei D ein (nicht notwendig semielliptischer) linearer Differentialoperator 2. Ordnung auf $\mathbb{R}^d$ mit stetigen und beschränkten Koeffizienten. Sei f eine Funktion aus $C_b^2(\mathbb{R}^d)$, für die gilt:

$$D(\tau_z f) \geq 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^d.$$

Dann folgt $D(\tilde{P}^{t_1, t_2} f) \geq 0$ für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$.

Beweis: Nach Hilfssatz 1 gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}^{t_1, t_2}_{t_1, t_2} f(x) &= \int_{x+B+R} (\tau_x \tilde{K}_{t_1, t_2})(z) \cdot f(z) d_R z \\ &= \int_{B+R} \tilde{K}_{t_1, t_2}(z) \cdot (\tau_{-x} f)(z) d_R z \\ &= \int_{B+R} \tilde{K}_{t_1, t_2}(z) \cdot (\tau_{-z} f)(x) d_R z, \end{aligned}$$

dabei bezeichnet $d_R z$ das d_R -dimensionale Lebesgue-Maß.

Wegen $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ können wir in dem Ausdruck

$$D \int_{B+R} \tilde{K}_{t_1, t_2}(z) \cdot (\tau_{-z} f)(x) d_R z$$

die Reihenfolge von Differentiation und Integration vertauschen. Aus der obigen Gleichung folgt somit:

$$D \tilde{p}^{t_1, t_2}_{t_1, t_2} f(x) = \int_{B+R} \tilde{K}_{t_1, t_2}(z) \cdot D(\tau_{-z} f)(x) d_R z$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Der Integrand des Integrals auf der rechten Seite dieser Gleichung ist wegen der Voraussetzung und wegen der Konstruktion der Funktion $\tilde{K}_{t_1, t_2}$ nichtnegativ. Hieraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 2: Die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ seien für jedes t aus I von den Raumkoordinaten unabhängig. Sei eine monoton wachsende Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ gegeben, die punktweise gegen eine Funktion f auf $\mathbb{R}^d$ konvergiert. Es gelte $L_t(\tau_z f_n) \leq \tilde{L}_t(\tau_z f_n)$ für alle $t \in I$, $z \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann folgt $p^{t_1, t_2}_f \leq \tilde{p}^{t_1, t_2}_f$ für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$. Insbesondere folgt aus $\tilde{p}^{t_1, t_2}_f(x) < +\infty$ für bestimmte $t_1, t_2 \in I$ und $x \in \mathbb{R}^d$, daß f in Bezug auf das Maß $P(t_1, x; t_2, \cdot)$ summierbar ist.

Anmerkung: Da die Funktion f nach unten beschränkt ist, sind P^{t_1, t_2}_f und $\tilde{P}^{t_1, t_2}_f$ definiert (siehe Definition 1.1).

Beweis: Seien t_1, t_2 aus I mit $t_1 \leq t_2$ gegeben. Nach Voraussetzung gilt $(\tilde{L}_t - L_t)(\tau_z f_n) \geq 0$ für alle $t \in I$, $z \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$. Aus Folgerung 1 folgt:

$$L_t \tilde{P}^{t, t_2}_{f_n} \leq \tilde{L}_t \tilde{P}^{t, t_2}_{f_n} \quad \text{für alle } t \in I \text{ mit } t \leq t_2, n \in \mathbb{N}.$$

Aus der Gestalt der Maße $\tilde{P}(t, x; t_2, \cdot)$ und aus $f_n \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ folgt, daß die Funktionen $\tilde{P}^{t, t_2}_{f_n}$ für alle $t \in [t_1, t_2]$ zweimal stetig differenzierbar sind und daß ihre partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung gleichmäßig beschränkt sind für jedes $n \in \mathbb{N}$. Aus Folgerung 2.2 erhalten wir somit:

$$(7) \quad P^{t_1, t_2}_{f_n} \leq \tilde{P}^{t_1, t_2}_{f_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Satz über die monotone Konvergenz von Lebesgue gelten $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{t_1, t_2}_{f_n}(x) = P^{t_1, t_2}_f(x)$ und

$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{P}^{t_1, t_2}_{f_n}(x) = \tilde{P}^{t_1, t_2}_f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Die Behauptung folgt aus (7) durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$.

In den Hilfssätzen 3 und 4 bzw. in Hilfssatz 5 bestimmen wir Klassen von Funktionen auf $\mathbb{R}^d$, auf die sich bei geeigneter Wahl der Familie $\{\tilde{L}_t\}$ der Hilfssatz 2 anwenden läßt.

Definition: Für positive Zahlen A, B, C sei $L_{A, B, C}$ die Menge der linearen Differentialoperatoren der Form

$$\frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^d a_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

für diejenigen stetigen Funktionen a_{ij} , b_i und c auf $\mathbb{R}^d$, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$\frac{1}{A} \cdot \mathbb{I} \leq (a_{ij}(x))_{i,j} \leq A \cdot \mathbb{I}, \quad \|(b_i(x))_i\| \leq B, \quad |c(x)| \leq C$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Hilfssatz 3: Seien positive Zahlen A, B, C und α gegeben. Dann gibt es eine Konstante K , so daß für alle Differentialoperatoren D aus $L_{A,B,C}$ und alle Funktionen F aus $C^2(\mathbb{R}^d)$ mit $F + \alpha \cdot \mathbb{I} \cdot \|\cdot\|^2$ konvex gilt:

$$D(\exp F) + K \cdot \exp F \geq 0.$$

Beweis: Sei $D = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + c$

ein Differentialoperator aus $L_{A,B,C}$. Dann gilt für jede reelle Zahl K :

$$\begin{aligned} & (\exp F)^{-1} \cdot (D + K)(\exp F) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_i b_i \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} + (c+K) \\ (8) \quad & \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (F + \alpha \cdot \mathbb{I} \cdot \|\cdot\|^2) - \alpha \cdot \sum_i a_{ii} \\ & \quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 - B \cdot \sum_i \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right| + (K - C). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind die Matrizen $(a_{ij}(x))_{i,j}$ und $(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (F + \alpha \cdot \mathbb{I} \cdot \|\cdot\|^2)(x))_{i,j}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ positiv definit bzw. semidefinit. Der erste Summand auf der rechten Seite der Ungleichung (8) ist die Spur des Produktes dieser Matrizen und daher nach Anhang 2.1. nichtnegativ. Wir wählen die Konstante K so, daß die folgende quadratische Funktion nur positive Werte annimmt:

$$\lambda \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \lambda^2 - B \cdot \lambda + \frac{1}{d} \cdot (K - C) - \alpha \cdot A \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dann ist die Summe der letzten vier Glieder auf der rechten

Seite der Ungleichung (8) positiv. Hieraus folgt die Behauptung.

Sei F eine nach unten beschränkte konvexe Funktion auf $\mathbb{R}^d$. Im folgenden Hilfssatz konstruieren wir eine monoton wachsende Folge $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $C_b^2(\mathbb{R}^d)$, die punktweise gegen die Funktion F konvergiert, so daß sich Hilfssatz 3 auf jede der Funktionen F_n anwenden läßt. Aus den so gewonnenen Abschätzungen können wir mit Hilfe von Hilfssatz 2 Abschätzungen für die Funktionen $P^{t_1, t_2}(\exp F)$ herleiten (siehe Satz 1). Es zeigt sich, daß wir die obigen Voraussetzungen an F etwas abschwächen können.

Hilfssatz 4: Seien eine nach unten beschränkte Funktion F auf $\mathbb{R}^d$ und eine positive Zahl α gegeben, so daß die Funktion $F + \alpha \cdot \|\cdot\|^2$ konvex ist. Dann existieren Funktionen F_n aus $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ mit $F_n + \alpha \cdot \|\cdot\|^2$ konvex für alle n aus $\mathbb{N}$, so daß die Folge $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und punktweise gegen die Funktion F konvergiert.

Beweis: Sei s eine untere Schranke für die Funktion F . Wir wählen eine Folge $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ affilinearer Funktionen auf $\mathbb{R}^d$, so daß die Funktion $F + \alpha \cdot \|\cdot\|^2$ gleich dem Supremum dieser Folge ist. Für jedes n aus $\mathbb{N}$ definieren wir eine Funktion h_n aus $C(\mathbb{R}^d)$ durch:

$$h_n := \max \{ s ; \max_{k=1, \dots, n} l_k - \alpha \cdot \|\cdot\|^2 \} .$$

Offensichtlich ist die Folge $\{h_n\}$ monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen die Funktion F . Die Funktion $h_n + \alpha \cdot \|\cdot\|^2$ ist für jedes n gleich dem Maximum der konvexen Funktionen $s + \alpha \cdot \|\cdot\|^2$ und $l_1, \dots, l_n$ und daher konvex. Da

die Funktion $\alpha \cdot \|\cdot\|^2$ im Unendlichen schneller wächst als jede affin-lineare Funktion, stimmt jede Funktion h_n auf dem Komplement einer kompakten Menge mit der Konstanten s überein. Folglich ist jede Funktion h_n beschränkt und gleichmäßig stetig. Daher können wir für jedes n aus $\mathbb{N}$ eine positive Zahl ϵ_n finden, so daß gilt:

$$(8) \quad \|\varphi_d(\epsilon_n, \cdot) * h_n - h_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{3 \cdot 2^n}$$

(dabei ist $\varphi_d(\cdot, \cdot)$ der Gaußsche Kern, siehe die Liste der Bezeichnungen). Wir definieren die Funktionen F_n durch:

$$F_n := \varphi_d(\epsilon_n, \cdot) * h_n - \frac{1}{2^n} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Die Monotonie der Folge $\{F_n\}$ und ihre punktweise Konvergenz gegen die Funktion F folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der Folge $\{h_n\}$ und aus der Gleichung (8). Aus der Beschränktheit der Funktionen h_n und aus den Eigenschaften der Faltung folgt, daß die Funktionen F_n in $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ liegen. Schließlich folgt aus der Konvexität der Funktion $h_n + \alpha \cdot \|\cdot\|^2$ für ein beliebiges n auch die Konvexität der Funktion $\varphi_d(\epsilon_n, \cdot) * (h_n + \alpha \cdot \|\cdot\|^2)$. Diese Funktion unterscheidet sich jedoch nur um eine additive Konstante von der Funktion $F_n + \alpha \cdot \|\cdot\|^2$, diese ist daher ebenfalls konvex.

Satz 1: Die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ seien für jedes t aus I von den Raumkoordinaten unabhängig. Seien positive Zahlen A, B, C und eine nach unten beschränkte Funktion F auf $\mathbb{R}^d$ mit $F + \alpha \cdot \|\cdot\|^2$ konvex für eine geeignete reelle Zahl α gegeben.

Dann gibt es eine Konstante K , so daß aus $\tilde{L}_t - L_t \in L_{A,B,C}$

für alle t aus I folgt:

$$P^{t_1, t} \tilde{P}^{t, t_2} (\exp \tau_x F) \leq \exp (K \cdot (t - t_1)) \cdot \tilde{P}^{t_1, t_2} (\exp \tau_x F)$$

für alle $t_1, t, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t \leq t_2$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$.
Für $t = t_2$ und $x = \vec{0}$ erhalten wir insbesondere:

$$P^{t_1, t_2} (\exp F) \leq \exp (K \cdot (t_2 - t_1)) \cdot \tilde{P}^{t_1, t_2} (\exp F).$$

Beweis: Sei α eine positive Zahl, so daß $F + \alpha \cdot \|\cdot\|^2$ konvex ist. Nach Hilfssatz 4 existieren Funktionen F_n aus $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ mit $F_n + \alpha \cdot \|\cdot\|^2$ konvex für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß die Folge $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und punktweise gegen die Funktion F konvergiert. Aus $F_n + \alpha \cdot \|\cdot\|^2$ konvex folgt $\tau_z (F_n + \alpha \cdot \|\cdot\|^2)$ konvex für jedes $z \in \mathbb{R}^d$. Diese Funktion unterscheidet sich nur um eine affine Funktion von der Funktion $(\tau_z F_n) + \alpha \cdot \|\cdot\|^2$, die daher ebenfalls konvex ist. Nach Hilfssatz 3 gibt es somit eine Konstante K , so daß aus $\tilde{L}_t - L_t \in L_{A, B, C}$ für alle t aus I folgt:

$$\{(\tilde{L}_t - L_t) + K\} \exp (\tau_z F_n) \geq 0 \text{ für alle } t \in I, z \in \mathbb{R}^d.$$

Wegen $\tau_y (\exp (\tau_z \tau_x F_n)) = \exp (\tau_{x+y+z} F_n)$ können wir hieraus schließen, daß gilt:

$$\{(\tilde{L}_t - L_t) + K\} \tau_y (\exp (\tau_z \tau_x F_n)) \geq 0$$

für alle $t \in I$; $x, y, z \in \mathbb{R}^d$. Nach Folgerung 1 gilt dann:

$$(9) \quad \{(\tilde{L}_t - L_t) + K\} \tilde{P}^{t_0, t_2} (\exp (\tau_z \tau_x F_n)) \geq 0$$

für alle $t, t_0 \in I$ mit $t_0 \leq t_2$; $x, z \in \mathbb{R}^d$. Aus Hilfssatz 1 folgt $\tilde{P}^{t_0, t_2} (\exp (\tau_z \tau_x F_n)) = \tau_z (\tilde{P}^{t_0, t_2} (\exp \tau_x F_n))$.

Wir können (9) daher wie folgt umformen:

$$(10) \quad L_t(\tau_z(\tilde{p}^{t_0, t_2}(\exp \tau_x F_n))) \leq (\tilde{L}_t + K)(\tau_z(\tilde{p}^{t_0, t_2}(\exp \tau_x F_n)))$$

für alle $t, t_0 \in I$ mit $t_0 \leq t_2$; $x, z \in \mathbb{R}^d$.

Aus der Definition der Folge $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ folgt, daß die Folge $\{\exp \tau_x F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und punktweise gegen die Funktion $\exp \tau_x F$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}^d$. Daher ist die Folge $\{\tilde{p}^{t_0, t_2}(\exp \tau_x F_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls monoton wachsend und konvergiert nach dem Satz über die monotone Konvergenz von Lebesgue punktweise gegen die Funktion $\tilde{p}^{t_0, t_2}(\exp \tau_x F)$ (diese Funktion kann auch den Wert $+\infty$ annehmen). Nach Hilfssatz 1 ist zu der Familie $\{\tilde{L}_t + K\}$ von Differentialoperatoren die Familie $\{\exp(K \cdot (t_2 - t_1)) \cdot \tilde{p}(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ von Übergangsmaßen assoziiert. Mit Hilfssatz 2 erhalten wir aus (10):

$$\begin{aligned} & p^{t_1, t_0} \tilde{p}^{t_0, t_2}(\exp \tau_x F) \\ & \leq \exp(K \cdot (t_0 - t_1)) \cdot \tilde{p}^{t_1, t_0} \tilde{p}^{t_0, t_2}(\exp \tau_x F) \end{aligned}$$

für alle $t_1, t_0, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_0 \leq t_2$; $x \in \mathbb{R}^d$. Hieraus folgt die Behauptung.

Folgerung 2: Die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ seien für jedes t aus I von den Raumkoordinaten unabhängig. Sei $(\tilde{a}_{ij}(t))_{i,j}$ positiv definit für alle t aus I . Seien $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$ gegeben und sei $\tilde{K}_{t_1, t_2}$ die in Hilfssatz 1 definierte Funktion. Weiter seien positive Zahlen A, B, C gegeben.

Dann gibt es eine Konstante K_0 , so daß aus $\tilde{L}_t - L_t \in L_{A, B, C}$ für alle $t \in I$ folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) \tau_x((\tilde{K}_{t_1, t_2})^{-1})(y) \leq K_0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Insbesondere ist die Funktion $\tau_x((\tilde{K}_{t_1, t_2})^{-1})$ in Bezug auf das Maß $P(t_1, x; t_2, \cdot)$ summierbar.

Vgl. zu diesem Resultat die "exponentielle Majorisierung" in STROOCK/VARADHAN [3], Theorem 4.2.1.

Beweis: Sei $\tilde{L}_t := \tilde{L}_t - \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \frac{\Delta}{2}$ für alle t aus I . Aus $\tilde{L}_t - L_t \in L_{A, B, C}$ folgt $\tilde{L}_t - L_t \in L_{2 \cdot A, B, C}$. Nach Definition ist die Funktion $(\tilde{K}_{t_1, t_2})^{-1}$ konvex. Wir wenden Satz 1 auf die Familie $\{\tilde{L}_t\}$ und die Funktion $(\tilde{K}_{t_1, t_2})^{-1}$ an und erhalten, daß es eine Konstante K gibt mit

$$\begin{aligned} & P^{t_1, t_2}(\tau_x((\tilde{K}_{t_1, t_2})^{-1}))(x) \\ & \leq \exp(K \cdot (t_2 - t_1)) \cdot \tilde{P}^{t_1, t_2}(\tau_x((\tilde{K}_{t_1, t_2})^{-1}))(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Aus Hilfssatz 1 folgt:

$$\tilde{P}^{t_1, t_2}(\tau_x((\tilde{K}_{t_1, t_2})^{-1}))(x) = \tilde{P}^{t_1, t_2}((\tilde{K}_{t_1, t_2})^{-1})(\vec{0}).$$

Aus $\tilde{P}^{t_1, t_2}((\tilde{K}_{t_1, t_2})^{-1})(\vec{0}) < +\infty$ folgt die Behauptung.

Folgerung 3: Die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ seien für jedes t aus I von den Raumkoordinaten unabhängig. Sei $\{L_t\}$ eine Familie von Differentialoperatoren, so daß für geeignete positive Zahlen A, B, C gilt $\tilde{L}_t - L_t \in L_{A, B, C}$ für alle t aus I . Seien $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$ gegeben und sei $\tilde{K}_{t_1, t_2}$ die in Hilfssatz 1 definierte Funktion.

Sei f eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^d$ mit

$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) \cdot \tilde{\kappa}_{t_1, t_2}(x) = 0$. Dann ist die Funktion P^{t_1, t_2}_f ebenfalls stetig.

Beweis: Wir wählen Funktionen f_n aus $C_b(\mathbb{R}^d)$ mit $|f_n - f| \leq \frac{1}{n} \cdot (\tilde{\kappa}_{t_1, t_2})^{-1}$ für alle n . Die Funktionen $P^{t_1, t_2}_{f_n}$ sind nach P2.)b) stetig. Sei M eine beliebige beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^d$. Wir zeigen, daß die Einschränkungen der Funktionen $P^{t_1, t_2}_{f_n}$ auf die Menge M gleichmäßig gegen die Einschränkung der Funktion P^{t_1, t_2}_f auf die Menge M konvergieren.

Zunächst gilt:

$$|(P^{t_1, t_2}_{f_n} - P^{t_1, t_2}_f)(x)| \leq \frac{1}{n} \cdot P^{t_1, t_2}((\tilde{\kappa}_{t_1, t_2})^{-1})(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Sei $\tilde{L}_t := \tilde{L}_t - \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \frac{\Delta}{2}$ für alle $t \in I$. Dann gibt es eine Konstante C_M , so daß für alle $x \in M$ gilt:

$$(\tilde{\kappa}_{t_1, t_2})^{-1} \leq C_M \cdot \tau_x((\tilde{\kappa}_{t_1, t_2})^{-1})$$

Nach Folgerung 2 existiert eine Konstante K_0 mit

$$P^{t_1, t_2}(\tau_x((\tilde{\kappa}_{t_1, t_2})^{-1}))(x) \leq K_0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Es folgt, daß für alle $x \in M$ gilt:

$$|(P^{t_1, t_2}_{f_n} - P^{t_1, t_2}_f)(x)| \leq \frac{1}{n} \cdot C_M \cdot K_0$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Mit ähnlichen Mitteln wie Satz 1 beweisen wir den folgenden Hilfssatz, der in Abschnitt 6 benötigt wird.

Hilfssatz 5: Sei F eine Funktion aus $C^2(\mathbb{R}^d)$, deren partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung beschränkt sind. Weiter

seien positive Zahlen A, B, C gegeben.

Dann gibt es eine reelle Zahl K , so daß aus

$$(a_{ij}(x,t))_{i,j} \leq A \cdot \mathbb{1} \quad , \quad \|(b_i(x,t))_i\| \leq B \quad , \quad |c(x,t)| \leq C$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $t \in I$ folgt:

$$P^{t_1, t_2}(\exp F) \leq \exp(K \cdot (t_2 - t_1)) \cdot \exp F$$

für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$.

Anmerkung: Daraus, daß die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion F beschränkt sind, folgt, daß der Betrag der Funktion F im Unendlichen höchstens linear wächst.

Beweis: Sei h eine nach oben beschränkte Funktion aus $C^2(\mathbb{R})$ mit $|h'(\lambda)| \leq 1$ und $|h''(\lambda)| \leq 1$ für alle λ aus $\mathbb{R}$ und $h(\lambda) = \lambda$ für $\lambda < 0$ (setze z.B. $h(\lambda) := \arctan \lambda$ für $\lambda \geq 0$). Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine nach oben beschränkte Funktion F_n aus $C^2(\mathbb{R}^d)$ durch:

$$F_n(x) := h(F(x) - n) + n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Aus der Definition der Funktion h folgt, daß die Folge

$\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Funktion F konvergiert. Aus $|h'(\lambda)| \leq 1$ für alle λ aus $\mathbb{R}$ folgt:

$$h(F(x) - (n+1)) + n + 1 \geq h(F(x) - n) + n$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $n \in \mathbb{N}$. Somit ist die Folge $\{F_n\}$ monoton wachsend. Da die partiellen Ableitungen 1. und 2.

Ordnung der Funktionen F_n Produkte bzw. Summen von Produkten der partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktionen $\tau_n h$ und F sind, sind die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktionen F_n gleichmäßig beschränkt für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\{L_t\}$ eine Familie von Differentialoperatoren,

die die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 & (\exp (\tau_z F_n))^{-1} \cdot L_t(\exp (\tau_z F_n)) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} a_{ij}(\cdot, t) \cdot \tau_z \left(\frac{\partial^2 F_n}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial F_n}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial F_n}{\partial x_j} \right) \\
 & \quad + \sum_i b_i(\cdot, t) \cdot \tau_z \left(\frac{\partial F_n}{\partial x_i} \right) + c(\cdot, t) \\
 &\leq (d^2 \cdot A + d \cdot B + C) \cdot \sup_{i,j,n} \left\{ \left\| \frac{\partial^2 F_n}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_\infty, \left\| \frac{\partial F_n}{\partial x_i} \right\|_\infty^2, \left\| \frac{\partial F_n}{\partial x_i} \right\|_\infty, 1 \right\}
 \end{aligned}$$

für alle $t \in I$, $z \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$. Der Wert des Ausdrucks auf der rechten Seite dieser Ungleichung hängt nicht von n oder von der gewählten Familie $\{L_t\}$ ab, sei die Zahl K gleich dem Wert dieses Ausdrucks. Sei $\tilde{L}_t$ für jedes t aus I der Operator der Multiplikation mit dem konstanten Faktor K .

Dann gilt:

$$L_t(\tau_z(\exp F_n)) \leq \tilde{L}_t(\tau_z(\exp F_n))$$

für alle $t \in I$, $z \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$. Aus Hilfssatz 2 folgt:

$$P^{t_1, t_2}(\exp F) \leq \tilde{P}^{t_1, t_2}(\exp F)$$

für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$. Nach Hilfssatz 1 gilt

$$\tilde{P}^{t_1, t_2} f = \exp(K \cdot (t_2 - t_1)) \cdot f \quad \text{für alle } f \in C(\mathbb{R}^d).$$

Hieraus folgt die Behauptung.

4. Untere Schranken für Übergangswahrscheinlichkeiten

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns vorwiegend mit dem Problem, untere Schranken für die Übergangswahrscheinlichkeiten zu finden. Zunächst untersuchen wir jedoch, welche Abschätzungen für die Übergangswahrscheinlichkeiten sich unmittelbar aus den bisher bewiesenen Sätzen herleiten lassen. Aus dem Vergleichslemma aus Abschnitt 2 erhalten wir eine einfache Abschätzung, die jedoch nur auf beschränkten Mengen nichttriviale Aussagen liefert. Dagegen können wir mit Hilfe der Majorisierungen aus Abschnitt 3 genauere obere Schranken für die Übergangswahrscheinlichkeiten konstruieren.

Definition 1: Auf der Menge der Familien von semielliptischen linearen Differentialoperatoren auf $\mathbb{R}^d$, die die Bedingungen L1.) und L2.) erfüllen, definieren wir eine Metrik ρ durch:

$$\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) := \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^d \|a_{ij} - \tilde{a}_{ij}\|_{\infty} + \sum_{i=1}^d \|b_i - \tilde{b}_i\|_{\infty} + \|c - \tilde{c}\|_{\infty}.$$

Aus Satz 2.1 und Hilfssatz 3.1 folgt unmittelbar:

Folgerung 1: Die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ seien für jedes t aus I von den Raumkoordinaten unabhängig. Sei f eine Funktion aus $C_b^2(\mathbb{R}^d)$. Weiter seien eine positive Zahl ϵ und $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$ gegeben.

Dann existiert eine positive Zahl δ , so daß aus

$$\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) < \delta \quad \text{folgt} \quad \|P^{t_1, t_2} f - \tilde{P}^{t_1, t_2} f\|_{\infty} < \epsilon.$$

Durch geeignete Wahl der Funktion f lassen sich aus dieser Folgerung Abschätzungen für die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(t_1, x; t_2, U_x(y))$ für $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$; $x, y \in \mathbb{R}^d$

und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ gewinnen (entsprechende Funktionen werden z.B. in Beispiel 1 konstruiert). Aus der nachstehenden Folgerung können wir insbesondere schließen, daß gilt

$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} P(t_1, x; t_2, U_r(y)) = 0$ für alle $t_1, t_2 \in I$; $x \in \mathbb{R}^d$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$. Daher lassen sich aus Folgerung 1 keine nichttrivialen asymptotischen Abschätzungen für $P(t_1, x; t_2, U_r(y))$ für $\|x - y\| \rightarrow \infty$ gewinnen.

Folgerung 2: Seien positive Zahlen A, B, C und $\tilde{A}$ mit $\tilde{A} > A$ gegeben. Ferner seien $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$ gegeben. Dann existiert eine Konstante K_1 , so daß aus $L_t \in L_{A,B,C}$ für alle $t \in I$ folgt:

$$P(t_1, x; t_2, U_R(x)) \leq K_1 \cdot \exp \left(- \tilde{A}^{-1} \cdot \frac{R^2}{2 \cdot (t_2 - t_1)} \right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und alle positiven Zahlen R .

Beweis: Wir setzen $A' := \max \{ \tilde{A} - A^{-1}; (\tilde{A} - A)^{-1} \}$. Dann folgt aus $L_t \in L_{A,B,C}$, daß gilt $\tilde{A} \cdot \frac{A}{2} - L_t \in L_{A',B,C}$. Wir setzen $\tilde{L}_t := \tilde{A} \cdot \frac{A}{2}$ für alle $t \in I$. Nach Folgerung 3.2 existiert eine Konstante K_0 , so daß aus $\tilde{L}_t - L_t \in L_{A',B,C}$ für alle $t \in I$ folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) \tau_x(\tilde{K}_{t_1, t_2}(y))^{-1} \leq K_0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Hieraus folgt die Behauptung.

Wir wollen für geeignete Mengen $M \subset (U_R(x))$ eine untere Schranke für $P(t_1, x; t_2, M)$ angeben. Dazu konstruieren wir Funktionen mit kompaktem Träger, die eine zu der in Hilfssatz 3.3 bewiesenen Abschätzung analoge Abschätzung erfüllen. Da es außer der identisch verschwindenden Funktion keine Funktion aus $C_c^2(\mathbb{R})$ gibt, deren Ableitung sich in jedem Punkt

des Definitionsbereiches betragsmäßig gegen ein konstantes Vielfaches des Funktionswertes abschätzen läßt, schätzen wir den Betrag der Ableitung der Funktion in einem Teil des Definitionsbereiches gegen ein Vielfaches der zweiten Ableitung der Funktion ab.

Hilfssatz 1: Seien positive Zahlen A, B, C gegeben. Sei f eine nichtnegative Funktion aus $C_C^2(\mathbb{R})$ mit $f(0) > 0$ und der folgenden Eigenschaft:

Für jede positive Zahl ε existiert eine positive Zahl δ , so daß für jedes λ aus $\mathbb{R}$ gilt:

$$f(\lambda) \geq \delta \quad \text{oder} \quad |f'(\lambda)| \leq \varepsilon \cdot f''(\lambda) \quad .$$

Dann gibt es eine Konstante K , so daß für alle Differentialoperatoren D aus $L_{A,B,C}$ gilt:

$$(D + \alpha \cdot K)(\tau_y f(\alpha \cdot \| \cdot \|^2)) \geq 0$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \geq 1$ und alle $y \in \mathbb{R}^d$.

Beweis: Sei $D = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + c$ ein Differentialoperator aus $L_{A,B,C}$. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \geq 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Wir setzen $z := x - y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & D(\tau_y f(\alpha \cdot \| \cdot \|^2))(x) \\ &= 2 \cdot ((a_{ij}(x))_{i,j}, z, z) \cdot \alpha^2 \cdot f''(\alpha \cdot \|z\|^2) \\ & \quad + \text{trace}((a_{ij}(x))_{i,j}) \cdot \alpha \cdot f'(\alpha \cdot \|z\|^2) \\ & \quad + 2 \cdot ((b_i(x))_i, z) \cdot \alpha \cdot f'(\alpha \cdot \|z\|^2) + c(x) \cdot f(\alpha \cdot \|z\|^2) \\ (1) \quad & \geq 2 \cdot \|z\|^2 \cdot \alpha^2 \cdot \min \left\{ \frac{1}{A} \cdot f''(\alpha \cdot \|z\|^2) ; A \cdot f''(\alpha \cdot \|z\|^2) \right\} \\ & \quad - (d \cdot A + 2 \cdot B \cdot \|z\|) \cdot \alpha \cdot |f'(\alpha \cdot \|z\|^2)| - C \cdot f(\alpha \cdot \|z\|^2) \quad . \end{aligned}$$

Sei s eine reelle Zahl, so daß der Träger von f im Intervall $(-\infty, s]$ enthalten ist. Da $f(0) > 0$ ist, gibt es eine positive Zahl ω mit $f(\lambda) \geq \omega$ für alle $\lambda \in [0, \omega)$. Wir setzen:

$$\varepsilon := \inf_{\lambda \geq \omega} \frac{2}{A} \cdot \lambda \cdot (d \cdot A + 2 \cdot B \cdot \sqrt{\lambda})^{-1}.$$

Da $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2}{A} \cdot \lambda \cdot (d \cdot A + 2 \cdot B \cdot \sqrt{\lambda})^{-1} = \infty$ gilt, ist ε größer als Null. Nach Voraussetzung existiert eine positive Zahl δ , so daß für alle λ aus $\mathbb{R}$, für die $f(\lambda) < \delta$ ist, gilt $|f'(\lambda)| \leq \varepsilon \cdot f''(\lambda)$. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $\delta < \omega$ ist. Für $A < 1$ ist $L_{A,B,C}$ leer, sei also $A \geq 1$.

Wir wählen die Konstante K , so daß gilt:

$$(2) \quad (K - C) \cdot \delta \geq 2 \cdot A \cdot s \cdot \|f''\|_{\infty} + (d \cdot A + 2 \cdot B \cdot \sqrt{s}) \cdot \|f'\|_{\infty}.$$

Insbesondere ist also $K \geq C$.

Wir nehmen zunächst an, daß $f(\alpha \cdot \|z\|^2) \geq \delta$ ist. Aus $\delta > 0$ folgt $\alpha \cdot \|z\|^2 \leq s$. Wir erhalten somit aus (2):

$$\begin{aligned} & 2 \cdot A \cdot \|z\|^2 \cdot \alpha^2 \cdot |f''(\alpha \cdot \|z\|^2)| + (d \cdot A + 2 \cdot B \cdot \|z\|) \cdot \alpha \cdot |f'(\alpha \cdot \|z\|^2)| \\ & \leq \alpha \cdot (K - C) \cdot \delta \\ & \leq (\alpha \cdot K - C) \cdot f(\alpha \cdot \|z\|^2). \end{aligned}$$

Aus (1) folgt, daß die Behauptung des Hilfssatzes in diesem Fall erfüllt ist (aus $A \geq 1$ folgt $-A \cdot |f''(\alpha \cdot \|z\|^2)| \leq \frac{1}{A} \cdot f''(\alpha \cdot \|z\|^2)$).

Wir nehmen jetzt an, daß $f(\alpha \cdot \|z\|^2) < \delta$ ist. Aus der Definition von δ folgt dann $|f'(\alpha \cdot \|z\|^2)| \leq \varepsilon \cdot f''(\alpha \cdot \|z\|^2)$. Ferner folgt aus $f(\alpha \cdot \|z\|^2) < \delta < \omega$, daß gilt $\alpha \cdot \|z\|^2 \geq \omega$. Aus der Definition von ε folgt daher für $\lambda := \alpha \cdot \|z\|^2$:

$$|f'(\alpha \cdot \|z\|^2)| \leq \frac{2}{A} \cdot (\alpha \cdot \|z\|^2) \cdot (d \cdot A + 2 \cdot B \cdot \sqrt{\alpha \cdot \|z\|^2})^{-1} \\ \cdot f''(\alpha \cdot \|z\|^2)$$

Also gilt:

$$(d \cdot A + 2 \cdot B \cdot \|z\|) \cdot \alpha \cdot |f'(\alpha \cdot \|z\|^2)| \leq \frac{2}{A} \cdot \|z\|^2 \cdot \alpha^2 \cdot f''(\alpha \cdot \|z\|^2)$$

Ferner folgt aus $K \geq C$, daß gilt $(\alpha \cdot K - C) \cdot f(\alpha \cdot \|z\|^2) \geq 0$.
Die Behauptung folgt wiederum aus (1).

Beispiel 1: Wir konstruieren Funktionen, die die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllen. Seien positive Zahlen r_1, r_2 mit $r_1 < r_2$ gegeben. Wir setzen:

$$f_{r_1, r_2}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq r_1 \\ (r_2 - r_1)^{-4} \cdot (r_2 - |x|)^4 & \text{für } \frac{r_1 + r_2}{2} \leq |x| \leq r_2 \\ 0 & \text{für } |x| \geq r_2 \end{cases}$$

Für $r_1 < |x| < \frac{r_1 + r_2}{2}$ definieren wir $f_{r_1, r_2}(x)$ so, daß $f_{r_1, r_2}(x) \geq \frac{1}{16}$ gilt und daß die Funktion f_{r_1, r_2} auf $\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist. Es läßt sich unmittelbar nachprüfen, daß f_{r_1, r_2} die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt.

Satz 1: Die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ seien für jedes t aus I von den Raumkoordinaten unabhängig. Seien positive Zahlen A, B, C und r_1, r_2 mit $r_1 < r_2$ gegeben.

Dann gibt es eine positive Zahl K , so daß aus

$L_t - \tilde{L}_t \in L_{A, B, C}$ für alle t aus I folgt:

$$(3) \quad P(t_1, x; t_2, U_{\rho \cdot r_2}(y)) \geq \exp(-\frac{1}{\rho^2} \cdot K \cdot (t_2 - t_1)) \cdot \tilde{P}(t_1, x; t_2, U_{\rho \cdot r_1}(y))$$

für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$, alle reellen Zahlen ρ

mit $\rho \leq 1$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Anmerkung: Der erste Faktor auf der rechten Seite von (3) hängt nicht von x und y ab.

Beweis: Wir wenden Hilfssatz 1 auf die in Beispiel 1 definierte Funktion f_{r_1, r_2} an. Sei K eine Konstante, so daß aus $L_t - \tilde{L}_t \in L_{A, B, C}$ für alle t aus I folgt:

$$((L_t - \tilde{L}_t) + \alpha \cdot K) (\tau_z(f_{r_1, r_2}(\alpha \cdot \|\cdot\|^2))) \geq 0$$

für alle $t \in I$; $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \geq 1$ und $z \in \mathbb{R}^d$. Wir setzen $\alpha := \rho^{-2}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} & L_t(\tau_z(f_{r_1, r_2}(\rho^{-2} \cdot \|\cdot\|^2))) \\ & \geq (\tilde{L}_t - \rho^{-2} \cdot K) (\tau_z(f_{r_1, r_2}(\rho^{-2} \cdot \|\cdot\|^2))) \end{aligned}$$

für alle $t \in I$, $z \in \mathbb{R}^d$. Aus Folgerung 2.2 und Hilfssatz 3.1 folgt:

$$\begin{aligned} & P^{t_1, t_2}(\tau_Y(f_{r_1, r_2}(\rho^{-2} \cdot \|\cdot\|^2))) \\ (4) \quad & \geq \exp(-\rho^{-2} \cdot K \cdot (t_2 - t_1)) \cdot \tilde{P}^{t_1, t_2}(\tau_Y(f_{r_1, r_2}(\rho^{-2} \cdot \|\cdot\|^2))) \end{aligned}$$

für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$ und $y \in \mathbb{R}^d$. Aus der Definition der Funktion f_{r_1, r_2} folgt:

$$\begin{aligned} P(t_1, x; t_2, U_{\rho \cdot r_2}(y)) & \geq P^{t_1, t_2}(\tau_Y(f_{r_1, r_2}(\rho^{-2} \cdot \|\cdot\|^2)))(x), \\ \tilde{P}(t_1, x; t_2, U_{\rho \cdot r_1}(y)) & \leq \tilde{P}^{t_1, t_2}(\tau_Y(f_{r_1, r_2}(\rho^{-2} \cdot \|\cdot\|^2)))(x). \end{aligned}$$

Wenn wir diese beiden Ungleichungen in (4) einsetzen, erhalten wir die Behauptung.

Bemerkung 1: Völlig analog könnte man zeigen, daß unter den Voraussetzungen des Satzes eine positive Zahl K' existiert, so daß aus $\tilde{L}_t - L_t \in L_{A,B,C}$ für alle t aus I die umgekehrte Ungleichung der Ungleichung (3) folgt. Ein entsprechendes Resultat haben wir jedoch bereits auf eine natürlichere Weise bewiesen (siehe Folgerung 3.2).

5. Ein Vergleichslemma für unbeschränkte Funktionen

Wir verallgemeinern das Vergleichslemma aus Abschnitt 2 unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ für jedes t aus I von den Raumkoordinaten unabhängig sind, auf geeignete unbeschränkte Funktionen.

Definition 1: Für eine positive Funktion K aus $C(\mathbb{R}^d)$ sei B_K die Menge derjenigen Funktionen f aus $C^1(\mathbb{R}^d)$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) \cdot K(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot K(x) = 0$$

für $i=1, \dots, d$. Wir definieren eine Norm $\|\cdot\|_K$ auf der Menge B_K durch:

$$\|f\|_K := \max \{ \|f \cdot K\|_\infty ; \max_i \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot K \right\|_\infty \} \quad \text{für alle } f \in B_K.$$

Mit der üblichen linearen Struktur und der Norm $\|\cdot\|_K$ wird B_K zu einem Banach-Raum.

Hilfssatz 1: Für jede positive Funktion K aus $C(\mathbb{R}^d)$ ist $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ eine dichte Teilmenge des Banach-Raums B_K .

Beweis: Für jede Funktion f aus $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ haben die Funktionen $f \cdot K$ und $\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot K$ für alle i einen kompakten Träger. Somit ist $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ eine Teilmenge von B_K . Sei jetzt eine beliebige Funktion f aus B_K gegeben. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir eine Funktion h_n aus $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ mit

$$h_n|_{U_n(0)} = 1, \quad 0 \leq h_n \leq 1 \quad \text{und} \quad \left\| \frac{\partial h_n}{\partial x_i} \right\|_\infty \leq 1 \quad \text{für alle } i.$$

Aus $h_n \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ folgt $h_n \cdot f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ für alle n . Wir zeigen, daß die Folge $\{h_n \cdot f\}$ in Bezug auf die Norm $\|\cdot\|_K$ gegen die Funktion f konvergiert.

Sei ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann gilt für alle $x \in U_n(0)$:

$$((f - h_n) \cdot f) \cdot K(x) = 0; \quad \left(\frac{\partial (f - h_n) \cdot f}{\partial x_1} \cdot K \right)(x) = 0 \quad \text{für alle } i.$$

Andererseits gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| \geq n$:

$$|((f - h_n) \cdot f) \cdot K(x)| \leq |f(x) \cdot K(x)| \leq \sup_{\|z\| \geq n} |f(z) \cdot K(z)|$$

und

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\partial (f - h_n) \cdot f}{\partial x_1} \cdot K \right)(x) \right| \\ & \leq \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} (1 - h_n) \right\|_{\infty} \cdot \sup_{\|z\| \geq n} |f(z) \cdot K(z)| \\ & \quad + \|1 - h_n\|_{\infty} \cdot \sup_{\|z\| \geq n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(z) \cdot K(z) \right| \\ & \leq \sup_{\|z\| \geq n} |f(z) \cdot K(z)| + \sup_{\|z\| \geq n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(z) \cdot K(z) \right| \quad \text{für alle } i. \end{aligned}$$

Da f in B_K liegt, gelten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{\|z\| \geq n} |f(z) \cdot K(z)| \right) = 0 \quad \text{und}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{\|z\| \geq n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(z) \cdot K(z) \right| \right) = 0 \quad \text{für alle } i.$$

Hieraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - h_n \cdot f\|_K = 0$.

Satz 1: Die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ seien für jedes t aus

I von den Raumkoordinaten unabhängig. Es gelte

$(\tilde{a}_{ij}(t))_{i,j} \geq \delta \cdot \mathbb{1}$ für alle t und eine geeignete positive Zahl δ . Weiter sei eine Familie $\{L_t\}$ gegeben. Sei $\{L_t^Y\}$ eine Familie von Differentialoperatoren der Form

$$L_t^Y = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} \tilde{a}_{ij}(t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \tilde{b}_i(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \tilde{c}(t)$$

(hierbei sind $\tilde{b}_i(t)$ und $\tilde{c}(t)$ die entsprechenden Koeffizienten des Differentialoperators $\tilde{L}_t$), so daß für eine geeignete positive Zahl δ gilt:

$$(\check{a}_{ij}(t))_{i,j} \geq (\tilde{a}_{ij}(t))_{i,j} + \check{\delta} \cdot \mathbb{1} \quad \text{und}$$

$$(\check{a}_{ij}(t))_{i,j} \geq (a_{ij}(x,t))_{i,j} + \check{\delta} \cdot \mathbb{1} \quad \text{für alle } t \text{ und } x.$$

Die zu der Familie $\{\check{L}_t\}$ assoziierte Familie von Übergangsmaßen bezeichnen wir mit $\{\check{P}(t_1, x; t_2, \cdot)\}$. Seien t_1, t_2 aus I mit $t_1 < t_2$ gegeben. Sei $\check{K}$ die Dichte des Maßes $\check{P}(t_1, 0; t_2, \cdot)$ in Bezug auf das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$ (vgl. Hilfssatz 3.1).

Dann gilt für alle Funktionen f aus B_K^Y :

$$(P^{t_1, t_2} f - \tilde{P}^{t_1, t_2} f)(x) = \int_{t_1}^{t_2} P^{t_1, t}(L_t - \tilde{L}_t) \check{P}^{t, t_2} f(x) dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Beweis: Sei ein festes $x \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Wir zeigen, daß die in der Behauptung auftretenden Ausdrücke für jede Funktion f aus B_K^Y definiert sind und daß die folgenden linearen Funktionale auf dem Banach-Raum B_K^Y stetig sind:

$$\begin{aligned} f &\rightarrow P^{t_1, t_2} f(x), \quad f \rightarrow \tilde{P}^{t_1, t_2} f(x), \\ f &\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} P^{t_1, t}(L_t - \tilde{L}_t) \check{P}^{t, t_2} f(x) dt. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz 2.1 zeigen wir, daß die Behauptung für jede Funktion f aus $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ richtig ist. Die Behauptung des Satzes folgt dann aus Hilfssatz 1.

Sei $\tilde{L}_t := \check{L}_t - \frac{\check{\delta}}{2} \cdot \Delta$ für jedes $t \in I$. Die zu der Familie $\{\tilde{L}_t\}$ assoziierte Familie von Übergangsmaßen bezeichnen wir mit $\{\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)\}$. Für jedes $t \in I$ mit $t < t_2$ sei $\tilde{K}_{t, t_2}$ die Dichte des Maßes $\tilde{P}(t, 0; t_2, \cdot)$ in Bezug auf das Lebesgue-Maß, entsprechend definieren wir $\tilde{K}_{t, t_2}$ (vgl. Hilfs-

satz 3.1). Wir schätzen $\tilde{K}_{t,t_2}$ gegen ein geeignetes Vielfaches von $\tilde{K}_{t,t_2}$ ab. Aus

$$(\tilde{a}_{ij}(s))_{i,j} + \frac{\gamma}{2} \cdot \mathbb{1} \leq (\gamma_{ij}(s) - \frac{\gamma}{2} \cdot \delta_{ij})_{i,j}$$

folgt durch Integration und anschließende Multiplikation mit $\frac{1}{t_2-t}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t_2-t} \cdot \int_t^{t_2} (\tilde{a}_{ij}(s))_{i,j} ds + \frac{\gamma}{2} \cdot \mathbb{1} \\ & \leq \frac{1}{t_2-t} \cdot \int_t^{t_2} (\gamma_{ij}(s) - \frac{\gamma}{2} \cdot \delta_{ij})_{i,j} ds . \end{aligned}$$

Aus Anhang 2.2. folgt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{t_2-t} \cdot \int_t^{t_2} (\gamma_{ij}(s) - \frac{\gamma}{2} \cdot \delta_{ij})_{i,j} ds \right)^{-1} \\ & \leq \left(\frac{1}{t_2-t} \cdot \int_t^{t_2} (\tilde{a}_{ij}(s))_{i,j} ds + \frac{\gamma}{2} \cdot \mathbb{1} \right)^{-1} . \end{aligned}$$

Da die Funktionen $s \rightarrow \tilde{a}_{ij}(s)$ für $s \in I$ beschränkt sind, existiert eine positive Zahl C_1 , so daß für alle t aus $[t_1, t_2)$ gilt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{t_2-t} \cdot \int_t^{t_2} (\tilde{a}_{ij}(s))_{i,j} ds + \frac{\gamma}{2} \cdot \mathbb{1} \right)^{-1} \\ & \leq \left(\frac{1}{t_2-t} \cdot \int_t^{t_2} (\tilde{a}_{ij}(s))_{i,j} ds \right)^{-1} - C_1 \cdot \mathbb{1} . \end{aligned}$$

Wir setzen dies in die vorige Ungleichung ein und erhalten nach anschließender Division durch t_2-t :

$$\begin{aligned} & \left(\int_t^{t_2} (\tilde{a}_{ij}(s) - \frac{\gamma}{2} \cdot \delta_{ij})_{i,j} ds \right)^{-1} \\ & \leq \left(\int_t^{t_2} (\tilde{a}_{ij}(s))_{i,j} ds \right)^{-1} - \frac{C_1}{t_2-t} \cdot \mathbb{1} . \end{aligned}$$

Weiter sei C_2 eine positive Zahl, so daß für alle t aus

$[t_1, t_2)$ gilt:

$$\begin{aligned} & (\det \left(\int_t^{t_2} (\tilde{a}_{1j}(s))_{i,j} ds \right))^{-1/2} \\ & \leq C_2 \cdot (\det \left(\int_t^{t_2} (\check{a}_{1j}(s) - \frac{\gamma}{2} \delta_{1j})_{i,j} ds \right))^{-1/2} . \end{aligned}$$

Da die Glieder 0. und 1. Ordnung der Differentialoperatoren $\tilde{L}_t$ und $\tilde{L}_t$ für jedes t aus I übereinstimmen, erhalten wir aus den letzten beiden Ungleichungen und aus der expliziten Darstellung der Kerne $\tilde{K}_{t,t_2}$ und $\tilde{K}_{t,t_2}$ (vgl. Hilfssatz 3.1) die gewünschte Abschätzung:

$$(1) \quad \tilde{K}_{t,t_2}(z) \leq C_2 \cdot \exp \left(- \frac{C_1}{2 \cdot (t_2 - t)} \cdot \|z - \int_t^{t_2} (\tilde{b}_1(s))_i ds\|^2 \right) \cdot \tilde{K}_{t,t_2}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $t \in [t_1, t_2)$.

Analog erhalten wir aus

$$(\check{a}_{1j}(t) - \frac{\gamma}{2} \delta_{1j})_{i,j} + \frac{\gamma}{2} \delta_{1j} = (\check{a}_{1j}(t))_{i,j}$$

die folgende Abschätzung für die Kerne $\tilde{K}_{t,t_2}$ und $\check{K}_{t,t_2}$:

$$(2) \quad \tilde{K}_{t,t_2}(z) \leq C_4 \cdot \exp \left(- \frac{C_3}{2 \cdot (t_2 - t)} \cdot \|z - \int_t^{t_2} (\tilde{b}_1(s))_i ds\|^2 \right) \cdot \check{K}_{t,t_2}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $t \in [t_1, t_2)$ und positive Konstanten C_3 und C_4 . Aus (2) und aus Hilfssatz 3.1 folgt, daß die Funktion $1/\check{K}$ in Bezug auf die Maße $\tilde{P}(t_1, y; t_2, \cdot)$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ summierbar ist. Die Funktion $\ln(1/\check{K})$ ist nach Definition konvex. Daher folgt aus Satz 3.1, daß die Funktion $1/\check{K}$ auch in Bezug auf die Maße $P(t_1, y; t_2, \cdot)$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ summierbar ist. Für jede Funktion f aus B_K^y gilt nach Definition $|f| \leq \|f\|_K^y \cdot (1/\check{K})$. Also ist die Funktion f in Bezug auf das Maß $P(t_1, x; t_2, \cdot)$ summierbar und es gilt:

$$|p^{t_1, t_2}_{f(x)}| \leq \|f\|_K^V \cdot p^{t_1, t_2}_{(1/K)}(x) \quad .$$

Somit ist das Funktional $f \rightarrow p^{t_1, t_2}_{f(x)}$ ein stetiges lineares Funktional auf dem Banach-Raum B_K^V . Analog läßt sich zeigen, daß jede Funktion f aus B_K^V in Bezug auf das Maß $\tilde{P}(t_1, x; t_2, \cdot)$ summierbar ist und daß das Funktional $f \rightarrow \tilde{p}^{t_1, t_2}_{f(x)}$ stetig ist.

Wir zeigen jetzt, daß durch den Ausdruck

$$p^{t_1, t_2}_{(L_t - \tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, t_2}_{f(x)}} \quad \text{für jede Funktion } f \text{ aus } B_K^V \text{ und}$$

jedes $t \in [t_1, t_2)$ eine reelle Zahl definiert wird, und

schätzen den Absolutbetrag dieser Zahl nach oben ab. Für die

Abschätzung der partiellen Ableitungen 2. Ordnung der Funktion

$\tilde{p}^{t, t_2}_{f(x)}$ für ein festes t benötigen wir eine Abschätzung der

partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $\tilde{K}_{t, t_2}$.

Da $(\tilde{a}_{ij}(s))_{i,j} \geq \delta \cdot \mathbb{I}$ gilt für alle s aus I , existiert

eine Konstante C_5 mit

$$|(\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{K}_{t, t_2})(z)| \leq \frac{C_5}{t_2 - t} \cdot \|z - \int_t^{t_2} (\tilde{b}_1(s))_1 ds\| \cdot \tilde{K}_{t, t_2}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und jedes $t \in [t_1, t_2)$. Aus (1) folgt somit:

$$|(\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{K}_{t, t_2})(z)|$$

$$\leq \frac{C_5}{t_2 - t} \cdot \|z - \int_t^{t_2} (\tilde{b}_1(s))_1 ds\|$$

$$\cdot C_2 \cdot \exp(-\frac{C_1}{2 \cdot (t_2 - t)} \cdot \|z - \int_t^{t_2} (\tilde{b}_1(s))_1 ds\|^2) \cdot \tilde{K}_{t, t_2}(z) \quad .$$

Sei C_6 eine Konstante, so daß $\lambda \cdot \exp(-\frac{C_1}{2} \cdot \lambda^2) \leq C_6$ ist

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Für $\lambda := \frac{1}{\sqrt{t_2 - t}} \cdot \|z - \int_t^{t_2} (\tilde{b}_1(s))_1 ds\|$ folgt

aus der obigen Ungleichung:

$$(3) \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{K}_{t,t_2} \right) (z) \right| \leq C_2 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot \frac{1}{\sqrt{t_2 - t}} \cdot \tilde{K}_{t,t_2}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$; $t \in [t_1, t_2)$ und alle i .

Wir schätzen jetzt die Funktionen $\tilde{P}^{t,t_2}_f$ und ihre partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung ab. Da die Funktion f in Bezug auf die Maße $\tilde{P}(t_1, y; t_2, \cdot)$ summierbar ist, ist f auch in Bezug auf die Maße $\tilde{P}(t, y; t_2, \cdot)$ für alle $t \in [t_1, t_2)$, $y \in \mathbb{R}^d$ summierbar und es gilt:

$$(4) \quad (\tilde{P}^{t,t_2}_f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{K}_{t,t_2}(z) \cdot f(z+y) dz \quad \text{für alle } t, y.$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen der Funktion $\tilde{P}^{t,t_2}_f$ für ein festes t . Dazu betrachten wir die entsprechenden Differenzenquotienten und zeigen mit Hilfe des Satzes über die dominierte Konvergenz von Lebesgue, daß sich die Integration mit dem Grenzübergang vertauschen läßt. Sei e_i der i -te Vektor der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^d$. Dann gilt nach (4):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \cdot ((\tilde{P}^{t,t_2}_f)(y + h \cdot e_i) - (\tilde{P}^{t,t_2}_f)(y)) \\ (5) \quad &= \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{K}_{t,t_2}(z) \cdot \left(\frac{1}{h} \cdot (f(z+y+h \cdot e_i) - f(z+y)) \right) dz \end{aligned}$$

für alle reellen Zahlen h mit $h \neq 0$. Nach dem Mittelwertsatz gilt für alle h mit $0 < |h| < 1$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h} \cdot (f(z+y+h \cdot e_i) - f(z+y)) \right| \\ & \leq \sup \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(w) \right| \mid w \in U_{\|y\|+1}(z) \right\} \\ & \leq \|f\|_K^v \cdot \sup \left\{ (1/K)(w) \mid w \in U_{\|y\|+1}(z) \right\}. \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus (1) und (2), daß für eine geeignete positive Zahl c_t gilt:

$$\tilde{K}_{t,t_2}(z) \leq c_t \cdot \exp\left(-\frac{1}{c_t} \cdot \|z\|^2\right) \cdot \check{K}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$ (c_t hängt im allgemeinen von t ab).

Wir erhalten daher aus (5) mit Hilfe des Satzes über die dominierte Konvergenz von Lebesgue, daß die Funktion $\tilde{P}^{t,t_2}_f$ im Punkt y nach der i -ten Koordinate partiell differenzierbar ist und daß gilt:

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{P}^{t,t_2}_f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{K}_{t,t_2}(z) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(y+z) dz.$$

Analog folgt aus (3) und (2), daß die Funktion $\frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{P}^{t,t_2}_f$ für jedes i wiederum partiell differenzierbar ist und daß gilt:

$$(7) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j} \tilde{P}^{t,t_2}_f(y) = - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{K}_{t,t_2}(z) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(y+z) dz$$

für alle $y \in \mathbb{R}^d$ und alle i, j . Wir schätzen die rechten Seiten von (4), (6) und (7) mit Hilfe von (1) und (3) ab und erhalten:

$$\begin{aligned} |\tilde{P}^{t,t_2}_f(y)| &\stackrel{(1)}{\leq} c_2 \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{K}_{t,t_2}(z) \cdot |f(y+z)| dz \\ &\leq c_2 \cdot \|f\|_{\check{K}} \cdot \tilde{P}^{t,t_2}(1/\check{K})(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{P}^{t,t_2}_f(y) \right| &\stackrel{(1)}{\leq} c_2 \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{K}_{t,t_2}(z) \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(y+z) \right| dz \\ &\leq c_2 \cdot \|f\|_{\check{K}} \cdot \tilde{P}^{t,t_2}(1/\check{K})(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j} \tilde{P}^{t,t_2}_f(y) \right| &\stackrel{(3)}{\leq} c_2 \cdot c_5 \cdot c_6 \cdot \frac{1}{\sqrt{t_2-t}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{K}_{t,t_2}(z) \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(y+z) \right| dz \\ &\leq c_2 \cdot c_5 \cdot c_6 \cdot \frac{1}{\sqrt{t_2-t}} \cdot \|f\|_{\check{K}} \cdot \tilde{P}^{t,t_2}(1/\check{K})(y). \end{aligned}$$

Aus der letzten Ungleichung folgt insbesondere, daß die Voraussetzungen von Satz 2.1 für jede Funktion f aus $C_C^1(\mathbb{R}^d)$ erfüllt sind. Daher ist die Behauptung des Satzes für jede Funktion f aus $C_C^1(\mathbb{R}^d)$ richtig.

Andererseits folgt aus Satz 3.1, daß für eine geeignete Konstante C_7 gilt:

$$P^{t_1, t} \tilde{P}^{t, t_2}_{(1/K)} \leq C_7 \cdot \tilde{P}^{t_1, t_2}_{(1/K)} \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2].$$

Hieraus und aus den zuvor bewiesenen Abschätzungen für die Funktionen $\tilde{P}^{t, t_2} f$ und ihre partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung erhalten wir, daß für eine geeignete Konstante C_8 gilt:

$$(8) \quad |P^{t_1, t}_{(L_t - \tilde{L}_t)} \tilde{P}^{t, t_2} f(x)| \leq C_8 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t_2 - t}}\right) \cdot \|f\|_K^Y \cdot \tilde{P}^{t_1, t_2}_{(1/K)}(x)$$

für alle $t \in [t_1, t_2]$ und alle $f \in B_K^Y$.

Wir zeigen jetzt, daß die Funktion

$$t \rightarrow P^{t_1, t}_{(L_t - \tilde{L}_t)} \tilde{P}^{t, t_2} f(x) \quad \text{auf } [t_1, t_2]$$

für jede Funktion f aus B_K^Y Borel-meßbar ist. Nach Hilfssatz 1 existiert eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $C_C^1(\mathbb{R}^d)$, die in Bezug auf die Norm $\|\cdot\|_K^Y$ gegen die Funktion f konvergiert. Die Funktionen

$$t \rightarrow P^{t_1, t}_{(L_t - \tilde{L}_t)} \tilde{P}^{t, t_2} f_n(x)$$

sind nach dem Beweis von Satz 2.1 punktweise Grenzwerte von Folgen stetiger Funktionen und damit Borel-meßbar. Wegen (8) konvergiert die Folge der Funktionen

$t \rightarrow p^{t_1, t} (L_t - \tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, t_2} f_n(x)$ punktweise gegen die Funktion
 $t \rightarrow p^{t_1, t} (L_t - \tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, t_2} f(x)$. Diese ist daher ebenfalls
 Borel-meßbar.

Die Summierbarkeit der Funktion $t \rightarrow p^{t_1, t} (L_t - \tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, t_2} f(x)$
 folgt unmittelbar aus (8), da $\tilde{p}^{t_1, t_2} (1/K)(x)$ eine endliche
 von t unabhängige Zahl darstellt.

Durch bestimmte Integration in den Grenzen von t_1 bis t_2
 erhalten wir aus (8), daß das folgende lineare Funktional auf
 dem Banach-Raum B_K stetig ist:

$$f \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} p^{t_1, t} (L_t - \tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, t_2} f(x) dt.$$

Hieraus folgt die Behauptung des Satzes.

Bemerkung 1: Die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ seien für jedes t
 von den Raumkoordinaten unabhängig. Es gelte

$(\tilde{a}_{ij}(t))_{i,j} \geq \delta \cdot 1$ für alle t für eine feste positive Zahl
 δ . Sei eine Familie $\{L_t\}$ gegeben. Sei f eine Funktion
 aus $C^1(\mathbb{R}^d)$, die zusammen mit ihren partiellen Ableitungen
 1. Ordnung im Unendlichen langsamer wächst als $\exp(\varepsilon \cdot \| \cdot \|^2)$
 für jede positive Zahl ε . Dann gilt $f \in B_K$ für jede
 Funktion K der im Satz 1 beschriebenen Form. Wir können
 daher eine Familie $\{\tilde{L}_t\}$ auswählen, so daß die Voraussetzun-
 gen von Satz 1 erfüllt sind.

Satz 2: Die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ seien für jedes t von
 den Raumkoordinaten unabhängig. Es gelte $(\tilde{a}_{ij}(t))_{i,j} \geq \delta \cdot 1$
 für alle t für eine feste positive Zahl δ . Sei eine
 Familie $\{L_t\}$ gegeben. Sei f eine Funktion aus $C^2(\mathbb{R}^d)$,
 die zusammen mit ihren partiellen Ableitungen 1. und 2. Ord-

nung im Unendlichen langsamer wächst als $\exp(\varepsilon \cdot \| \cdot \|^2)$ für jede positive Zahl ε . Wir setzen ferner voraus, daß gilt:

$$L_t(\tau_z f) \leq \tilde{L}_t(\tau_z f) \quad \text{für alle } t \in I, z \in \mathbb{R}^d$$

$$(\text{oder } L_t(\tau_z f) \geq \tilde{L}_t(\tau_z f) \quad \text{für alle } t \in I, z \in \mathbb{R}^d).$$

Dann gilt $P^{t_1, t_2} f \leq \tilde{P}^{t_1, t_2} f$ für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$

(bzw. $P^{t_1, t_2} f \geq \tilde{P}^{t_1, t_2} f$ für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$).

Beweis: Wir wenden Bemerkung 1 an und zeigen wie im Beweis von Satz 1, Formel (6), daß gilt:

$$(L_t - \tilde{L}_t) \tilde{P}^{t, t_2} f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{K}_{t, t_2}(z) \cdot (L_t - \tilde{L}_t) f(y+z) dz$$

für alle $t \in [t_1, t_2]$ und $y \in \mathbb{R}^d$. Die rechte Seite der letzten Gleichung ist nach Voraussetzung kleiner oder gleich Null (bzw. größer oder gleich Null). Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 1.

Folgerung 1: Sei $\{P(t_1, x; t_2, \cdot)\}$ eine Familie von Übergangsmaßen, die zu einer Familie $\{L_t\}$ von Differentialoperatoren assoziiert ist. Dann gibt es eine Konstante C , so daß gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} P(t_1, x; t_2, dy) \|y - x\|^4 \leq C \cdot \exp(C \cdot (t_2 - t_1)) \cdot (t_2 - t_1)^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \leq t_2$.

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 2, wenn wir $\tilde{L}_t := K \cdot (\frac{\Delta}{2} + 1)$ setzen für eine genügend große positive Zahl K und die Funktionen $y \rightarrow \|y - x\|^4$ auf $\mathbb{R}^d$ betrachten für alle x aus $\mathbb{R}^d$ (aus $(g(t, \cdot) * \| \cdot \|^4)(0) = (d+2) \cdot t^2$ läßt sich $\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{P}(t_1, x; t_2, dy) \|y - x\|^4$ nach Hilfssatz 3.1 berechnen).

Aus Folgerung 1 folgt die Bedingung (*) aus Abschnitt 1.3.

6. Auslöschung negativer Anteile einer Funktion unter Übergangsabbildungen

Aus der Definition der Übergangsabbildungen folgt unmittelbar, daß das Bild einer nichtnegativen Borel-meßbaren Funktion unter einer beliebigen Übergangsabbildung eine nichtnegative Funktion mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ist. Zu einer Familie $\{\tilde{L}_t\}$ von Differentialoperatoren, deren Koeffizienten von den Raumkoordinaten unabhängig sind, lassen sich unter bestimmten Voraussetzungen auch Funktionen f finden, die sowohl positive als auch negative Werte annehmen, und für die gilt $\tilde{P}^{t_1, t_2} f$ nichtnegativ für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 + T \leq t_2$ für eine gewisse positive Zahl T . In diesem Abschnitt wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen aus der Positivität der Funktion $\tilde{P}^{t_1, t_2} f$ für gegebene $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$ die Positivität der Funktionen $P^{t_1, t_2} f$ für alle Familien $\{L_t\}$, deren Koeffizienten sich hinreichend wenig von den Koeffizienten der Familie $\{\tilde{L}_t\}$ unterscheiden, folgt. Zunächst grenzen wir die möglichen Resultate jedoch durch einige Beispiele ein.

Beispiel 1: Sei h_0 eine nichtnegative Funktion aus $C_c^2(\mathbb{R}^1)$, die nicht identisch verschwindet und deren Träger im Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ enthalten ist. Wir definieren die Funktion f_1 aus $C_c^2(\mathbb{R}^1)$ durch $f_1 := C \cdot (\tau_{-1} h_0 + \tau_1 h_0) - h_0$ für eine später festzulegende positive Zahl C . Aus den Voraussetzungen an h_0 folgt, daß die Funktion f_1 sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > \frac{3}{2}$ gilt:

$$(g_1(t, \cdot) * \tau_1 h_0)(x) = \int_{\mathbb{R}} g_1(t, x-y) \cdot h_0(y-1) dy$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} g_1(t, x-y-1) \cdot h_0(y) dy$$

$$> \int_{-1/2}^{1/2} g_1(t, x-y) \cdot h_0(y) dy$$

$$= (g_1(t, \cdot) * h_0)(x) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ mit } t > 0.$$

Analog zeigt man, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < -\frac{3}{2}$ gilt:

$$(g_1(t, \cdot) * \tau_{-1} h_0)(x) > (g_1(t, \cdot) * h_0)(x)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$. Wir setzen voraus, daß $C > 1$

gilt. Dann folgt, daß die Einschränkung der Funktion

$g_1(t, \cdot) * f_1$ auf das Komplement der kompakten Menge

$[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ nur positive Werte annimmt für eine beliebige

positive Zahl t . Durch Faltung der positiven Funktion

$g_1(1, \cdot)$ mit der nichtnegativen und nicht identisch verschwin-

den Funktion $\tau_{-1} h + \tau_1 h$ erhalten wir eine positive

Funktion. Wir können daher eine Zahl C mit $C > 1$ wählen,

so daß gilt:

$$C \cdot \min \{ (g_1(1, \cdot) * (\tau_{-1} h + \tau_1 h))(x) \mid x \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \}$$

$$> \|g_1(1, \cdot) * h\|_{\infty}.$$

Es folgt, daß die Einschränkung der Funktion $g_1(1, \cdot) * f_1$

auf das Intervall $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ nur positive Werte annimmt.

Daher ist die Funktion $g_1(1, \cdot) * f_1$ für eine geeignet

gewählte Zahl C positiv.

Schließlich betrachten wir die Funktion f_d aus $C_c^2(\mathbb{R}^d)$,

die durch $f_d(x) := f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_1(x_d)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$

definiert wird, dabei sind $x_1, \dots, x_d$ die Koordinaten des

Vektors x . Aus der Definition der Funktion f_1 folgt, daß

die Funktion f_d sowohl positive als auch negative Werte

annimmt. Andererseits gilt:

$$(g_d(1, \cdot) * f_d)(x) = (g_1(1, \cdot) * f_1)(x_1) \cdot \dots \cdot (g_1(1, \cdot) * f_1)(x_d)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Daher ist die Funktion $g_d(1, \cdot) * f_d$ positiv.

Sei $\{\tilde{L}_t\}$ eine Familie von Differentialoperatoren, deren Koeffizienten von den Raumkoordinaten unabhängig sind. Seien weiter eine Funktion f aus $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ und t_1, t_2 aus I mit $t_1 < t_2$ gegeben, so daß für eine geeignete positive Zahl ε gilt $\tilde{P}^{t_1, t_2} f \geq \varepsilon$. Dann ergibt sich aus Folgerung 4.1, daß für alle Familien $\{L_t\}$, deren Koeffizienten sich hinreichend wenig von den Koeffizienten der Familie $\{\tilde{L}_t\}$ unterscheiden, folgt $P^{t_1, t_2} f$ positiv. Das folgende Beispiel zeigt, daß diese Aussage unter der schwächeren Voraussetzung $\tilde{P}^{t_1, t_2} f$ positiv im allgemeinen nicht mehr gilt.

Beispiel 2: Wir konstruieren zunächst eine Funktion h aus $C_c^2(\mathbb{R}^1)$, so daß die Funktion $g_1(1, \cdot) * h$ nichtnegativ ist und auf dem Komplement einer geeigneten kompakten Menge nur positive Werte annimmt und daß keine der Funktionen $g_1(t, \cdot) * h$ für $t < 1$ nichtnegativ ist.

Wir betrachten die im Beispiel 1 konstruierte Funktion f_1 und setzen $t_0 := \inf \{t \mid t \geq 0, g_1(t, \cdot) * f_1 \text{ nichtnegativ}\}$, dabei sei $g_1(0, \cdot)$ das Punktmaß δ_0 . Die Menge $\{t \mid t \geq 0, g_1(t, \cdot) * f_1 \text{ nichtnegativ}\}$ ist gleich dem Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen $\{t \mid t \geq 0, (g_1(t, \cdot) * f_1)(x) \geq 0\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und daher ebenfalls abgeschlossen. Es folgt, daß die Funktion $g_1(t_0, \cdot) * f_1$ nichtnegativ ist. Da die Funktion f_1 auch

negative Werte annimmt, gilt $t_0 > 0$. Die gesuchte Funktion h wird durch $h(x) := f_1(\sqrt{t_0} \cdot x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Wir konstruieren induktiv Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$1.) \quad (g_1(1 - \frac{1}{n}, \cdot) * (\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cdot \tau_{x_k} h))(z_n) < 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$2.) \quad (g_1(1 - \frac{1}{m}, \cdot) * (\frac{1}{2^n} \cdot \tau_{x_n} h))(z_m) < \frac{1}{2^{n-m+1}} \cdot |(g_1(1 - \frac{1}{m}, \cdot) * (\sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \cdot \tau_{x_k} h))(z_m)|$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$,

$$3.) \quad \text{die Funktion } \tau_{x_2}(g_1(1, \cdot) * (\frac{1}{2} \cdot h)) + \tau_{x_1}(g_1(1, \cdot) * (\frac{1}{2} \cdot h))$$

ist positiv .

Sei n aus $\mathbb{N}$ beliebig. Wir nehmen an, daß die Zahlen x_m und z_m für alle m aus $\mathbb{N}$ mit $m < n$ bereits definiert sind, und konstruieren x_n und z_n . Aus der Konstruktion der Funktion h folgt, daß eine reelle Zahl y_0 existiert mit $(g_1(1 - \frac{1}{n}, \cdot) * h)(y_0) < 0$. Da

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (g(t, \cdot) * h)(x) = 0$$

ist für jedes t mit $t > 0$, gilt für eine geeignete positive Zahl C_1 :

$$\{g_1(1 - \frac{1}{n}, \cdot) * (\frac{1}{2^n} \cdot h) + \tau_{-x}(g_1(1 - \frac{1}{n}, \cdot) * (\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \cdot \tau_{x_k} h))\}(y_0) < 0$$

für alle x mit $|x| > C_1$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt insbesondere:

$$(g_1(1 - \frac{1}{m}, \cdot) * (\sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \cdot \tau_{x_k} h))(z_m) \neq 0 \quad \text{für alle } m \text{ mit } m < n .$$

Also gilt für eine geeignet gewählte positive Zahl C_2 :

$$\tau_x(g_1(1 - \frac{1}{m}, \cdot) * (\frac{1}{2^n} \cdot h))(z_m) \\ < \frac{1}{2^{n-m+1}} * |(g_1(1 - \frac{1}{m}, \cdot) * (\sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \cdot \tau_{x_k} h))(z_m)|$$

für alle x mit $|x| > C_2$ und alle m mit $m < n$. Aus der Konstruktion der Funktion h folgt, daß die Funktion $g_1(1, \cdot) * h$ nichtnegativ und auf dem Komplement einer geeigneten kompakten Menge positiv ist. Wir können daher eine positive Zahl C_3 finden, so daß die Funktion

$$\tau_x(g_1(1, \cdot) * (\frac{1}{2^n} \cdot h)) + \tau_{x_m}(g_1(1, \cdot) * (\frac{1}{2^m} \cdot h))$$

für alle x mit $|x| > C_3$ und alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ positiv ist.

Sei jetzt x_n eine reelle Zahl mit $|x_n| > \max \{C_1; C_2; C_3\}$ und sei $z_n := x_n + y_0$. Wegen

$$(g_1(1 - \frac{1}{n}, \cdot) * (\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cdot \tau_{x_k} h))(z_n) \\ = \tau_{x_n} \{g_1(1 - \frac{1}{n}, \cdot) * (\frac{1}{2^n} \cdot h) + \tau_{-x_n}(g_1(1 - \frac{1}{n}, \cdot) * (\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \cdot \tau_{x_k} h))\}(z_n) \\ = \{g_1(1 - \frac{1}{n}, \cdot) * (\frac{1}{2^n} \cdot h) + \tau_{-x_n}(g_1(1 - \frac{1}{n}, \cdot) * (\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \cdot \tau_{x_k} h))\}(y_0) \\ < 0$$

ist die Bedingung 1.) erfüllt. Die Bedingungen 2.) und 3.)

folgen unmittelbar aus der Definition der Zahlen x_n und z_n .

Wir definieren die Funktion f aus $C_b^2(\mathbb{R}^1)$ durch:

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \tau_{x_n} h.$$

Aus der Bedingung 3.) und daraus, daß die Funktion

$g_1(1, \cdot) * h$ nichtnegativ ist, folgt, daß die Funktion $g_1(1, \cdot) * f$ positiv ist. Andererseits folgt aus den Bedingungen 1.) und 2.), daß für jedes m aus $\mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 & (g_1(1 - \frac{1}{m}, \cdot) * f)(z_m) \\
 &= (g_1(1 - \frac{1}{m}, \cdot) * (\sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} \cdot \tau_{x_n} h))(z_m) \\
 &+ \sum_{n=m+1}^{\infty} (g_1(1 - \frac{1}{m}, \cdot) * (\frac{1}{2^n} \cdot \tau_{x_n} h))(z_m) \\
 &\stackrel{2.)}{<} (g_1(1 - \frac{1}{m}, \cdot) * (\sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} \cdot \tau_{x_n} h))(z_m) \\
 &+ \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-m+1}} \cdot |(g_1(1 - \frac{1}{m}, \cdot) * (\sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \cdot \tau_{x_k} h))(z_m)| \\
 &= (g_1(1 - \frac{1}{m}, \cdot) * (\sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \cdot \tau_{x_k} h))(z_m) \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot |(g_1(1 - \frac{1}{m}, \cdot) * (\sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \cdot \tau_{x_k} h))(z_m)| \\
 &\stackrel{1.)}{<} 0
 \end{aligned}$$

Die Funktion $g_1(1 - \frac{1}{m}, \cdot) * f$ ist daher für kein m aus $\mathbb{N}$ nichtnegativ. Wir definieren jetzt Familien $\{\tilde{L}_t\}$ und $\{L_t^{(m)}\}$ für alle m aus $\mathbb{N}$ von Differentialoperatoren auf $\mathbb{R}^1$ durch

$$\tilde{L}_t := \frac{\Delta}{2} \quad \text{und} \quad L_t^{(m)} := (1 - \frac{1}{m}) \cdot \frac{\Delta}{2}$$

für alle $t \in [0, \infty)$ und alle $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt offensichtlich $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\{\tilde{L}_t\}, \{L_t^{(m)}\}) = 0$. Wir setzen $t_1 := 0$ und $t_2 := 1$. Dann ist die Funktion $\tilde{p}^{t_1, t_2} f$ positiv, dagegen ist keine der Funktionen $(p^{(m)})^{t_1, t_2} f$ nichtnegativ.

Satz 1: Die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ seien für jedes t von den Raumkoordinaten unabhängig. Gelte $(\tilde{a}_{ij}(t)) \geq \delta \cdot \mathbb{1}$ für alle t für ein geeignetes positives δ . Seien eine Funktion F aus

$C^2(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung und t_1, t_2 aus I mit $t_1 < t_2$ gegeben. Sei f eine Funktion aus $C^2(\mathbb{R}^d)$ mit $|f|, \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq \exp F$ für alle i, j . Es gelte $\tilde{P}^{t_1, t_2}_f \geq \varepsilon \cdot \exp F$ für eine geeignete positive Zahl ε .

Dann existiert eine positive Zahl δ , so daß aus $\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) < \delta$ folgt $\tilde{P}^{t_1, t_2}_f$ positiv.

Anmerkung: Daraus, daß die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion F beschränkt sind, folgt, daß der Betrag der Funktion F im Unendlichen höchstens linear wächst. Aus dem Beweis des Satzes folgt, daß die (dort bestimmte) Zahl δ nicht von der gewählten Funktion f , sondern nur von $\{L_t\}$, den L^∞ -Normen der partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion F sowie von t_1, t_2 und ε abhängt.

Beweis: Aus Satz 5.1 und Bemerkung 5.1 folgt, daß für eine beliebige Familie $\{L_t\}$ gilt:

$$\tilde{P}^{t_1, t_2}_f(x) = \tilde{P}^{t_1, t_2}_f(x) + \int_{t_1}^{t_2} \tilde{P}^{t_1, t}(L_t - \tilde{L}_t) \tilde{P}^{t, t_2}_f(x) dt.$$

Wir schätzen die Terme auf der rechten Seite dieser Gleichung nach unten ab. Nach Voraussetzung ist:

$$\tilde{P}^{t_1, t_2}_f(x) \geq \varepsilon \cdot \exp(F(x)).$$

Da die Beträge der Funktion f und ihrer partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung im Unendlichen höchstens exponentiell wachsen, können wir aus Hilfssatz 3.1 schließen, daß gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{P}^{t, t_2}_f = \tilde{P}^{t, t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tilde{P}^{t, t_2}_f = \tilde{P}^{t, t_2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

für alle $t \in [t_1, t_2]$ und alle i, j (vgl. den Beweis der

Gleichung (6) im Beweis von Satz 5.1). Aus den Voraussetzungen an f und aus der Definition der Metrik ρ folgt somit:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} p^{t_1, t} (L_t - \tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, t_2} f(x) dt \\ & \geq -\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) \cdot \int_{t_1}^{t_2} p^{t_1, t} \tilde{p}^{t, t_2} (\exp F)(x) dt. \end{aligned}$$

Sei ρ_0 eine beliebige positive Zahl. Nach Hilfssatz 3.5 gibt es eine Konstante K , so daß aus $\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) < \rho_0$ folgt:

$$p^{s_1, s_2}(\exp F) \leq \exp(K \cdot (s_2 - s_1)) \cdot \exp F$$

für alle $s_1, s_2 \in I$ mit $s_1 \leq s_2$. Wir wenden diese Ungleichung auch auf die Übergangsabbildungen $\tilde{p}^{t, t_2}$ an und erhalten somit, daß für jedes $t \in [t_1, t_2]$ gilt:

$$p^{t_1, t} \tilde{p}^{t, t_2}(\exp F) \leq \exp(K \cdot (t_2 - t_1)) \cdot \exp F.$$

Wenn wir die bisher bewiesenen Abschätzungen zusammenfassen, erhalten wir, daß aus $\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) < \rho_0$ folgt:

$$\begin{aligned} & p^{t_1, t_2} f(x) \\ & \geq \{t - \rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) \cdot (t_2 - t_1) \cdot \exp(K \cdot (t_2 - t_1))\} \cdot (\exp F(x)) \end{aligned}$$

für alle x aus $\mathbb{R}^d$. Für $\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\})$ genügend klein wird der erste Faktor auf der rechten Seite dieser Ungleichung positiv. Hieraus folgt die Behauptung.

Der folgende Satz wird in Abschnitt 7 angewendet. Um die Bezeichnungen zu vereinfachen, formulieren wir den Satz nur für den Fall, daß $\tilde{L}_t = \frac{\Delta}{2}$ gilt für alle t aus I . Die Behauptung des Satzes gilt jedoch auch unter der schwächeren Voraussetzung, daß die Koeffizienten von $\tilde{L}_t$ für alle t

aus I von den Raumkoordinaten unabhängig sind und daß die Matrizen $(\tilde{a}_{ij}(t))_{i,j}$ für alle t aus I positiv definit sind. Wir werden dies jedoch hier nicht beweisen.

Satz 2: Sei $\tilde{L}_t = \frac{\Delta}{2}$ für alle t aus I . Seien t_1, t_2 aus I mit $t_1 \leq t_2$ und eine Funktion f aus $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ gegeben, so daß die Funktion $\tilde{p}^{t_1, t_2}_f$ positiv ist. Ferner setzen wir voraus, daß eine beschränkte Menge M aus $\mathbb{R}^d$ und eine positive Zahl ε existieren, so daß für alle x aus dem Komplement von M gilt $f(x) > g_d(\varepsilon, x)$.

Dann existiert eine positive Zahl δ , so daß aus $\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) < \delta$ folgt $\tilde{p}^{t_1, t_2}_f$ positiv.

Beweis: Sei δ_0 eine positive Zahl mit $\delta_0 < \frac{1}{3}$ und

$$(1) \quad (t_2 - t_1) \cdot (1 - 2 \cdot \delta_0) + \varepsilon > (t_2 - t_1) \cdot (1 + 2 \cdot \delta_0) \quad .$$

Wir setzen zunächst voraus, daß $\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) < \delta_0$ gilt.

Sei R eine positive Zahl mit $M \subset U_R(0)$. Für alle x aus $U_R(0)$ gilt nach Voraussetzung $f(x) > g_d(\varepsilon, x) > 0$. Ferner wurde vorausgesetzt, daß f beschränkt ist. Sei C_1 eine untere Schranke für die Funktion f . Somit gilt für jede Borel-Menge V aus $\mathbb{R}^d$, die disjunkt zu der Menge $U_R(0)$ ist, die folgende Abschätzung:

$$(2) \quad \tilde{p}^{t_1, t_2}_f(x) \geq P(t_1, x; t_2, V) \cdot \inf_{z \in V} f(z) + P(t_1, x; t_2, U_R(0)) \cdot C_1 \quad .$$

Wir wollen zeigen, daß die rechte Seite dieser Ungleichung für alle x mit $\|x\|$ hinreichend groß bei geeigneter Wahl der Menge V positiv ist. Sei $\alpha := (t_2 - t_1) \cdot (1 - 2 \cdot \delta_0)$. Für ein beliebiges x aus $\mathbb{R}^d$ setzen wir $y := \frac{\varepsilon}{\alpha + \varepsilon} \cdot x$ und $V := U_1(y)$. Für $\|x\| \geq \frac{\alpha + \varepsilon}{\varepsilon} \cdot (R + 1)$ ist die Bedingung

V disjunkt zu $U_R(0)$ erfüllt. Wir schätzen die einzelnen Glieder auf der rechten Seite der Ungleichung (2) ab.

Nach Voraussetzung ist $\delta_0 < \frac{1}{3}$, wir setzen $\tilde{L}_t := (1 - 2\delta_0) \cdot \frac{\Delta}{2}$ für alle t aus I . Dann gibt es positive Zahlen A, B, C , so daß aus $\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) < \delta_0$ folgt $L_t - \tilde{L}_t \in L_{A,B,C}$ für alle t aus I . Nach Satz 4.1 existiert eine positive Zahl C_2 mit

$$P(t_1, x; t_2, V) \geq C_2 \cdot \tilde{P}(t_1, x; t_2, U_{1/2}(y)) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Sei C_3 das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel. Hiermit folgt:

$$\tilde{P}(t_1, x; t_2, U_{1/2}(y)) \geq C_3 \cdot \frac{1}{2^d} \cdot \inf_{z \in U_1(y)} g_d((t_2 - t_1) \cdot (1 - 2\delta_0), z - x).$$

Wenn wir die Definition von α einsetzen, erhalten wir schließlich, daß eine positive Zahl C_4 existiert mit

$$(3) \quad P(t_1, x; t_2, V) \geq C_4 \cdot \exp\left(-\frac{(\|y-x\|+1)^2}{2\alpha}\right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Für alle x mit $\|x\| \geq \frac{\alpha+\varepsilon}{\varepsilon} \cdot (R+1)$ ist V eine Teilmenge von $U_R(0)$. Wir setzen $C_5 := (2 \cdot \pi \cdot \varepsilon)^{-d/2}$. Dann gilt wegen der Voraussetzungen an f :

$$\begin{aligned} (4) \quad \inf_{z \in V} f(z) &\geq \inf_{z \in V} g_d(\varepsilon, z) \\ &= C_5 \cdot \exp\left(-\frac{(\|y\|+1)^2}{2 \cdot \varepsilon}\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| \geq \frac{\alpha+\varepsilon}{\varepsilon} \cdot (R+1)$. Wir setzen jetzt $A := 1 + \frac{3}{2} \cdot \delta_0$ und $\tilde{A} := 1 + 2 \cdot \delta_0$. Dann gibt es positive Zahlen B und C , so daß aus $\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) < \delta_0$ folgt $L_t \in L_{A,B,C}$ für alle t aus I (wegen $\delta_0 < \frac{1}{3}$ folgt aus $(a_{ij}(t)) \geq (1 - \delta_0) \cdot \mathbf{1}$, daß gilt $(a_{ij}(t)) \geq A^{-1} \cdot \mathbf{1}$). Nach Folgerung 4.2 existiert also eine positive Zahl C_6 mit

$$P(t_1, x; t_2, {}^{CU}_{\|x\| - R}(x)) \leq C_6 \cdot \exp \left(- \tilde{\lambda}^{-1} \cdot \frac{(\|x\| - R)^2}{2 \cdot (t_2 - t_1)} \right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| \geq R$. Da $U_R(0)$ eine Teilmenge von $({}^{CU}_{\|x\| - R}(x))$ ist, folgt hieraus (wir benutzen $\tilde{\lambda}^{-1} = 1 + 2 \cdot \delta_0$):

$$(5) \quad P(t_1, x; t_2, U_R(0)) \leq C_6 \cdot \exp \left(- \frac{(\|x\| - R)^2}{2 \cdot (t_2 - t_1) \cdot (1 + 2 \cdot \delta_0)} \right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| \geq R$.

Aus (2) bis (5) erhalten wir, daß für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| \geq \frac{\alpha + \varepsilon}{\varepsilon} \cdot (R + 1)$ gilt:

$$\begin{aligned} P^{t_1, t_2}_{f(x)} &\geq C_4 \cdot C_5 \cdot \exp \left(- \frac{(\|y - x\| + 1)^2}{2 \cdot \alpha} \right) \cdot \exp \left(- \frac{(\|y\| + 1)^2}{2 \cdot \varepsilon} \right) \\ &\quad - |C_1| \cdot C_6 \cdot \exp \left(- \frac{(\|x\| - R)^2}{2 \cdot (t_2 - t_1) \cdot (1 + 2 \cdot \delta_0)} \right). \end{aligned}$$

Nach Definition ist $y = \frac{\varepsilon}{\alpha + \varepsilon} \cdot x$. Es folgt $\|y\| = \frac{\varepsilon}{\alpha + \varepsilon} \cdot \|x\|$ und $\|y - x\| = \frac{\alpha}{\alpha + \varepsilon} \cdot \|x\|$. Wir setzen dies in die letzte Ungleichung ein und erhalten, daß für geeignete Konstanten

C_7, C_8, C_9, C_{10} gilt:

$$\begin{aligned} (6) \quad P^{t_1, t_2}_{f(x)} &\geq C_4 \cdot C_5 \cdot \exp \left(\left(- \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha + \varepsilon} \right)^2}{2 \cdot \alpha} - \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\alpha + \varepsilon} \right)^2}{2 \cdot \varepsilon} \right) \cdot \|x\|^2 + C_7 \cdot \|x\| + C_8 \right) \\ &\quad - |C_1| \cdot C_6 \cdot \exp \left(- \frac{\|x\|^2}{2 \cdot (t_2 - t_1) \cdot (1 + 2 \cdot \delta_0)} \right) + C_9 \cdot \|x\| + C_{10} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| \geq \frac{\alpha + \varepsilon}{\varepsilon} \cdot (R + 1)$. Aus (1) und der Definition von α folgt:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2 \cdot (t_2 - t_1) \cdot (1 + 2 \cdot \delta_0)} &< - \frac{1}{2 \cdot ((t_2 - t_1) \cdot (1 + 2 \cdot \delta_0) + \varepsilon)} \\ &= - \frac{1}{2 \cdot (\alpha + \varepsilon)} \\ &= - \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha + \varepsilon} \right)^2}{2 \cdot \alpha} - \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\alpha + \varepsilon} \right)^2}{2 \cdot \varepsilon}. \end{aligned}$$

Wir können daher eine Konstante C_{11} finden, so daß die rechte Seite von (6) positiv wird, wenn $\|x\| > C_{11}$ gilt.

Sei $C_{12} := \max \{C_{11} ; \frac{\alpha+\epsilon}{\epsilon} \cdot (R+1)\}$. Wir haben gezeigt, daß aus $\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) < \delta_0$ folgt:

$$(7) \quad p^{t_1, t_2}_f(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d \text{ mit } \|x\| > C_{12}.$$

Da die Funktion $\tilde{p}^{t_1, t_2}_f$ stetig und positiv ist, hat ihre Einschränkung auf die kompakte Menge $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq C_{12}\}$ ein positives Infimum. Nach Folgerung 4.1 existiert eine positive Zahl δ_1 , so daß aus $\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) < \delta_1$ folgt:

$$(8) \quad \|p^{t_1, t_2}_f - \tilde{p}^{t_1, t_2}_f\|_\infty < \inf \{\tilde{p}^{t_1, t_2}_f(x) \mid x \in \mathbb{R}^d \text{ mit } \|x\| \leq C_{12}\}.$$

Aus (7) und (8) folgt, daß die durch $\delta := \min \{\delta_0 ; \delta_1\}$ definierte positive Zahl δ die Bedingungen des Satzes erfüllt.

7. Ein Gegenbeispiel zu L^1 -Abschätzungen für Lösungen parabolischer Differentialgleichungen

Abschätzungen der Form $\|P^{t,0} f\|_p \leq k \cdot \|f\|_p$ für f aus einer geeigneten Klasse stetiger Funktionen und ein festes t mit $t < 0$ werden u.a. für die Lösung von L^p -Randwertproblemen für parabolische Differentialgleichungen benötigt (vgl. FABES/SROKA/WIDMAN [1] und FABES/JERISON/KENIG [1]; der Zusammenhang zwischen Diffusionsprozessen und parabolischen Differentialgleichungen wurde auch in den Abschnitten 1.5. und 1.6. skizziert).

Für ein beliebiges p mit $1 < p < \infty$ wurde in FABES/SROKA/WIDMAN [1] unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten der Glieder 2. Ordnung der Differentialoperatoren einer sogenannten Dini- $(\frac{1}{2})$ -Stetigkeitsbedingung genügen, eine Abschätzung der obigen Form hergeleitet. Wenn die Koeffizienten der Differentialoperatoren sogar Hölder-stetig sind, läßt sich für ein beliebiges p mit $1 \leq p \leq \infty$ eine Abschätzung der obigen Form herleiten, da die zugehörige parabolische Differentialgleichung in diesem Fall eine stetige Fundamentallösung besitzt (siehe z.B. STROOCK/VARADHAN [3], Theorem 3.2.1).

Das in IL'IN [1] gegebene Gegenbeispiel zeigt jedoch, daß die Menge der Quotienten $\|P^{t,0} f\|_1 / \|f\|_1$ für alle f aus einer geeigneten Funktionenklasse im Fall einer Familie von Differentialoperatoren, deren Koeffizienten einer Dini- (α) -Stetigkeitsbedingung mit $\alpha < \frac{1}{4}$ genügen, im allgemeinen unbeschränkt ist. In FABES/KENIG [1] wurde ein Beispiel konstruiert, das zeigt, daß die Menge der Quotienten

$t, 0$
 $\|P_t f\|_p / \|f\|_p$ für alle f aus einer geeigneten Funktionen-
 klasse und ein beliebiges p mit $1 < p < \infty$ im Fall einer
 Familie von Differentialoperatoren mit gleichmäßig stetigen
 Koeffizienten im allgemeinen unbeschränkt ist. Wir konstruie-
 ren ein Gegenbeispiel, das insbesondere zeigt, daß die
 Menge der Quotienten $\|P_t f\|_1 / \|f\|_1$ für alle f aus einer
 geeigneten Funktionenklasse auch im Fall einer Familie von
 Differentialoperatoren, deren Koeffizienten für alle α mit
 $\alpha < 1$ einer Dini- (α) -Stetigkeitsbedingung genügen, im all-
 gemeinen unbeschränkt ist. Dazu benötigen wir die nachstehende
 Folgerung aus Satz 6.2.

Folgerung 1: Sei $\tilde{L}_t = \frac{\Delta}{2}$ für alle t aus I . Für gegebene
 $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$, eine Funktion f aus $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ und
 eine positive Zahl ε sowie eine beschränkte Menge M seien
 die Voraussetzungen von Satz 6.2 erfüllt. Sei δ die positive
 Zahl aus der Behauptung des Satzes. Ferner sei λ eine reelle
 Zahl mit $0 < \lambda \leq 1$. Wir setzen voraus, daß das Intervall I
 den Nullpunkt enthält. Wir definieren die Funktion $f_{(\lambda)}$ aus
 $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ durch

$$f_{(\lambda)}(x) := f\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot x\right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann folgt aus $\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) < \delta$, daß gilt $P^{\lambda \cdot t_1, \lambda \cdot t_2} f_{(\lambda)}$
 positiv.

Anmerkung: Aus $0 < \lambda \leq 1$ und $0 \in I$ folgt $\lambda \cdot I \subseteq I$.

Beweis: Sei eine Familie $\{L_t\}$ mit $\rho(\{L_t\}, \{\tilde{L}_t\}) < \delta$
 gegeben. Wir definieren Funktionen $a_{ij}^{(\lambda)}$, $b_i^{(\lambda)}$, $c^{(\lambda)}$ auf
 $\mathbb{R}^d \times I$ für alle i, j durch:

$$a_{ij}^{(\lambda)}(x, t) := a_{ij}(\sqrt{\lambda} \cdot x, \lambda \cdot t) \quad ,$$

$$b_i^{(\lambda)}(x, t) := \sqrt{\lambda} \cdot b_i(\sqrt{\lambda} \cdot x, \lambda \cdot t) \quad ,$$

$$c^{(\lambda)}(x, t) := \lambda \cdot c(\sqrt{\lambda} \cdot x, \lambda \cdot t) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d, t \in I.$$

Sei

$$L_t^{(\lambda)} := \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} a_{ij}^{(\lambda)}(., t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i^{(\lambda)}(., t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + c^{(\lambda)}(., t)$$

für jedes $t \in I$. Dann erfüllt die Familie $\{L_t^{(\lambda)}\}_{t \in I}$ die Bedingungen L1.) und L2.). Es gilt $\rho(\{L_t^{(\lambda)}\}, \{\tilde{L}_t\}) < \delta$.

Sei die Familie $\{P(s_1, x; s_2, .)\}_{s_1, s_2 \in I; x \in \mathbb{R}^d}$ von Maßen zu der Familie $\{L_t\}$ assoziiert. Wir definieren die Maße

$P^{(\lambda)}(s_1, x; s_2, .)$ für alle $s_1, s_2 \in I$ mit $s_1 \leq s_2$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$ durch:

$$P^{(\lambda)}(s_1, x; s_2, B) := P(\lambda \cdot s_1, \sqrt{\lambda} \cdot x; \lambda \cdot s_2, \sqrt{\lambda} \cdot B)$$

für jede Borel-Menge $B \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann ist die Familie

$\{P^{(\lambda)}(s_1, x; s_2, .)\}$ zu der Familie $\{L_t^{(\lambda)}\}$ assoziiert. Aus

Satz 6.2 folgt, daß die Funktion

$$x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P^{(\lambda)}(t_1, x; t_2, dy) f(y) \quad \text{auf } \mathbb{R}^d$$

positiv ist. Wir setzen die Definition von $P^{(\lambda)}(t_1, x; t_2, .)$

ein und erhalten mit Hilfe der Substitution $z := \sqrt{\lambda} \cdot y$, daß die Funktion

$$x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} P(\lambda \cdot t_1, \sqrt{\lambda} \cdot x; \lambda \cdot t_2, dz) f\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot z\right) \quad \text{auf } \mathbb{R}^d$$

positiv ist. Hieraus folgt die Behauptung.

Satz 1: Sei ω eine monoton wachsende stetige Funktion von

$[0, \infty)$ in $\mathbb{R}$, die die Bedingungen $\omega(0) = 0$ und

$\int_0^1 \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} d\lambda = +\infty$ erfüllt. Wir setzen außerdem voraus, daß die

Funktion $\lambda \mapsto \frac{\omega(\lambda)}{\lambda}$ von $(0, \infty)$ in $\mathbb{R}$ monoton fallend ist.

Sei δ_0 eine beliebige positive Zahl.

Dann gibt es eine Funktion a von $\mathbb{R}^1 \times [-1, 0]$ in $\mathbb{R}$, die die Bedingungen $\|a - 1\|_\infty < \delta_0$ und

$$(1) \quad |a(x_1, t_1) - a(x_2, t_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|) + \omega(|t_1 - t_2|)$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $t_1, t_2 \in [-1, 0]$ erfüllt, so daß die durch die Familie $\{a(\cdot, t) \cdot \frac{\Delta}{2}\}_{t \in [-1, 0]}$ von Differentialoperatoren bestimmte Familie von Übergangsabbildungen P^{t_1, t_2} die folgende Eigenschaft hat:

Die Menge der Quotienten $\|P^{t_1, t_2} f\|_1 / \|f\|_1$ für alle summierbaren nicht identisch verschwindenden Funktionen f aus $C_b^\infty(\mathbb{R}^1)$ ist unbeschränkt.

Beweis: Sei u eine Funktion aus $C_b^\infty(\mathbb{R}^1)$ mit $0 \leq u \leq 1$, $|u'| \leq 2$ und $u(\lambda) = 1$ für alle λ mit $|\lambda| \geq 2$ sowie $u(\lambda) = 0$ für alle λ mit $|\lambda| \leq 1$. Wir definieren die Funktion a auf $\mathbb{R}^1 \times [-1, 0]$ durch

$$a(x, t) := 1 + C_1 \cdot u\left(\frac{1}{\sqrt{|t|}} \cdot x\right) \cdot \omega(|t|) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, t \in [-1, 0]$$

und $a(x, 0) := 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ für eine später festzulegende Konstante C_1 mit $0 < C_1 < \min\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{\omega(1)}; \frac{\delta_0}{\omega(1)}\right\}$. Aus $|C_1| < \frac{\delta_0}{\omega(1)}$ folgt, daß die Bedingung $\|a - 1\|_\infty < \delta_0$ erfüllt ist. Wir prüfen die Bedingung (1) nach. Sei o.B.d.A. $t_1 \leq t_2$. Für $t_2 = 0$ und $t_1 < 0$ gilt:

$$\begin{aligned} |a(x_1, t_1) - a(x_2, t_2)| &\leq C_1 \cdot u\left(\frac{1}{\sqrt{|t_1|}} \cdot x_1\right) \cdot \omega(|t_1|) \\ &\leq \omega(|t_1 - t_2|) \end{aligned}$$

Für $t_1 = t_2 = 0$ gilt $a(x_1, t_1) = a(x_2, t_2) = 1$. In diesen

Fällen ist die Bedingung (1) somit erfüllt. Sei jetzt $t_2 < 0$.
Dann folgt aus der Dreiecksungleichung und aus $|u| \leq 1$:

$$\begin{aligned} & |a(x_1, t_1) - a(x_2, t_2)| \\ &= C_1 \cdot \left| u\left(\frac{1}{\sqrt{|t_1|}} \cdot x_1\right) \cdot \omega(|t_1|) - u\left(\frac{1}{\sqrt{|t_2|}} \cdot x_2\right) \cdot \omega(|t_2|) \right| \\ (2) \quad &\leq C_1 \cdot |\omega(|t_1|) - \omega(|t_2|)| \\ &\quad + C_1 \cdot \left| u\left(\frac{1}{\sqrt{|t_1|}} \cdot x_1\right) - u\left(\frac{1}{\sqrt{|t_2|}} \cdot x_2\right) \right| \cdot \omega(|t_2|) \quad . \end{aligned}$$

Wir schätzen die einzelnen Terme auf der rechten Seite dieser Ungleichung nach oben ab. Da die Funktion $\lambda \rightarrow \frac{\omega(\lambda)}{\lambda}$ auf $(0, \infty)$ monoton fallend ist, gilt:

$$\begin{aligned} \omega(|t_1|) - \omega(|t_2|) &\leq \omega(|t_1|) - \omega(|t_1|) \cdot \frac{|t_2|}{|t_1|} \\ &= \omega(|t_1|) \cdot \frac{|t_1| - |t_2|}{|t_1|} \\ &\leq \omega(|t_1| - |t_2|) \\ &= \omega(|t_1 - t_2|) \quad . \end{aligned}$$

Da ω monoton wachsend ist, gilt $\omega(|t_1|) - \omega(|t_2|) \geq 0$.
Es folgt:

$$(3) \quad |\omega(|t_1|) - \omega(|t_2|)| \leq \omega(|t_1 - t_2|) \quad .$$

Aus $|u'| \leq 2$ folgt:

$$(4) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} u\left(\frac{1}{\sqrt{|t|}} \cdot x\right) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{|t|}} \leq \frac{2}{|t|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, t \in [-1, 0).$$

Analog folgt, daß für alle x mit $|x| \leq 2\sqrt{|t|}$ gilt:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} u\left(\frac{1}{\sqrt{|t|}} \cdot x\right) \right| \leq |x| \cdot |t|^{-3/2} \leq \frac{2}{|t|} \quad .$$

Aus der Definition von u folgt $u\left(\frac{1}{\sqrt{|t|}} \cdot x\right) = 1$ für alle x mit $|x| > 2\sqrt{|t|}$. Es folgt:

$$(5) \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} u\left(\frac{1}{\sqrt{|t|}} \cdot x\right) \right| \leq \frac{2}{|t|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, t \in [-1, 0).$$

Aus den Ungleichungen (4) und (5) und aus $0 \leq u \leq 1$ folgt:

$$\begin{aligned}
& |u(\frac{1}{\sqrt{|t_1|}} \cdot x_1) - u(\frac{1}{\sqrt{|t_2|}} \cdot x_2)| \cdot \omega(|t_2|) \\
& \leq |u(\frac{1}{\sqrt{|t_2|}} \cdot x_1) - u(\frac{1}{\sqrt{|t_2|}} \cdot x_2)| \cdot \omega(|t_2|) \\
& + |u(\frac{1}{\sqrt{|t_1|}} \cdot x_1) - u(\frac{1}{\sqrt{|t_2|}} \cdot x_1)| \cdot \omega(|t_2|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) \quad & \leq \min \{ |x_1 - x_2| \cdot \frac{2}{|t_2|} ; 1 \} \cdot \omega(|t_2|) \\
& + \min \{ |t_1 - t_2| \cdot \frac{2}{|t_2|} ; 1 \} \cdot \omega(|t_2|) .
\end{aligned}$$

Im Fall $|x_1 - x_2| \leq |t_2|$ folgt daraus, daß die Funktion $\lambda \rightarrow \frac{\omega(\lambda)}{\lambda}$ auf $(0, \infty)$ monoton fallend ist, daß gilt:

$$|x_1 - x_2| \cdot \frac{1}{|t_2|} \cdot \omega(|t_2|) \leq \omega(|x_1 - x_2|) .$$

Im Fall $|x_1 - x_2| > |t_2|$ folgt aus ω monoton wachsend:

$$\omega(|t_2|) \leq \omega(|x_1 - x_2|) .$$

In beiden Fällen gilt somit:

$$(7) \quad \min \{ |x_1 - x_2| \cdot \frac{2}{|t_2|} ; 1 \} \cdot \omega(|t_2|) \leq 2 \cdot \omega(|x_1 - x_2|) .$$

Analog kann man zeigen, daß gilt:

$$(8) \quad \min \{ |t_1 - t_2| \cdot \frac{2}{|t_2|} ; 1 \} \cdot \omega(|t_2|) \leq 2 \cdot \omega(|t_1 - t_2|) .$$

Wenn wir die Abschätzungen (3), (6), (7), (8) in (2) einsetzen und berücksichtigen, daß $C_1 < \frac{1}{3}$ ist, folgt die Bedingung (1).

Sei β aus $(0, \frac{1}{2})$ vorläufig fest. Wir schätzen die Funktion $P_{-1,0} g_1(\beta, \cdot)$ nach unten ab.

Wir setzen zunächst $\tilde{L}_t := -\frac{1}{\beta}$ für alle t aus $[-\beta, 0]$.

Wegen $0 < a(x, t) \leq 2$ für alle x, t gilt:

$$\begin{aligned}
 a(x,t) \cdot \left(\frac{\Delta}{2} g_1(\beta, \cdot)\right)(x) &= a(x,t) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta}\right) \cdot g_1(\beta, x) \\
 &\geq (L_t^\vee \alpha_1(\beta, \cdot))(x)
 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [-\beta, 0]$. Aus Folgerung 2.2 und Hilfssatz 3.1 folgt daher:

$$(9) \quad p^{-\beta, 0} g_1(\beta, \cdot) \geq \exp(-1) \cdot \alpha_1(\beta, \cdot).$$

Wir definieren jetzt eine Familie $\{\tilde{L}_t\}_{t \in [-1/2, -\beta]}$ durch:

$$\tilde{L}_t := \frac{\Delta}{2} + C_1 \cdot C_2 \cdot \frac{\omega(|t|)}{|t|} \quad \text{für alle } t \in [-\frac{1}{2}, -\beta],$$

die positive Zahl C_2 wird später festgelegt. Die durch die Familie $\{\tilde{L}_t\}$ bestimmten Übergangsabbildungen bezeichnen wir mit $\tilde{p}^{t_1, t_2}$ für beliebige Zeitpunkte t_1, t_2 . Aus

Satz 2.1 folgt:

$$\begin{aligned}
 &p^{-\frac{1}{2}, -\beta} \alpha_1(\beta, \cdot) = \tilde{p}^{-\frac{1}{2}, -\beta} \alpha_1(\beta, \cdot) \\
 (10) \quad &= \int_{-1/2}^{-\beta} p^{-\beta, -\frac{1}{2}, t} (L_t - \tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, -\beta} g_1(\beta, \cdot) dt,
 \end{aligned}$$

die Integration erfolgt dabei punktweise. Nach Hilfssatz 3.1 gilt:

$$(11) \quad \tilde{p}^{t, -\beta} g_1(\beta, \cdot) = \exp(C_1 \cdot C_2 \cdot \int_t^{-\beta} \frac{\omega(|\lambda|)}{\lambda} d\lambda) \cdot g_1(|t|, \cdot)$$

für alle $t \in [-\frac{1}{2}, -\beta]$. Sei $L_t := a(\cdot, t) \cdot \frac{\Delta}{2}$ für alle t aus I . Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 &((L_t - \tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, -\beta} g_1(\beta, \cdot))(x) \\
 &= c_t \cdot \{C_1 \cdot \omega(|t|) \cdot u(\frac{1}{\sqrt{|t|}} \cdot x) \cdot (\frac{\Delta}{2} g_1(|t|, \cdot))(x) \\
 &\quad - C_1 \cdot C_2 \cdot \frac{\omega(|t|)}{|t|} \cdot \alpha_1(|t|, x)\}
 \end{aligned}$$

$$(12) \quad = c_t \cdot \frac{C_1 \cdot \omega(|t|)}{2 \cdot |t|} \cdot \{u(\frac{1}{\sqrt{|t|}} \cdot x) \cdot ((\frac{1}{\sqrt{|t|}} \cdot x)^2 - 1) - 2 \cdot C_2\} \cdot \alpha_1(|t|, x)$$

für eine positive Zahl c_t , die nur von t abhängt, und für alle $t \in [-\frac{1}{2}, -\beta]$. Wegen der Voraussetzungen an u ist die Funktion $\lambda \rightarrow u(\lambda) \cdot (\lambda^2 - 1)$ nichtnegativ. Wir legen die positive Konstante C_2 so fest, daß die Funktion

$$g_1(1, \cdot) * (\{u(|\cdot|^2 - 1) - 2 \cdot C_2\} \cdot g_1(1, \cdot))$$

positiv ist (vgl. die Konstruktion der Funktion f_1 im Beispiel 6.1). Nach Satz 6.2 und Folgerung 7.1 existiert eine positive Zahl δ , so daß aus $\|a - 1\|_\infty < \delta$ folgt, daß die Funktion

$$z \rightarrow \int_{\mathbb{R}} p(2 \cdot t, z; t, dx) (\{u(\frac{1}{\sqrt{|t|}} \cdot x) \cdot (\frac{1}{\sqrt{|t|}} \cdot x)^2 - 1\} - 2 \cdot C_2) \cdot g_1(|t|, x))$$

für alle t mit $-1 \leq t < 0$ positiv ist. Wir wählen C_1 so, daß $\|a - 1\|_\infty < \delta$ gilt. Aus (12) folgt somit, daß die Funktion

$$p^{2 \cdot t, t} (L_t - \tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, -\beta} g_1(\beta, \cdot)$$

positiv ist für alle $t \in [-\frac{1}{2}, -\beta]$. Also ist auch die Funktion

$$p^{-1, t} (L_t - \tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, -\beta} g_1(\beta, \cdot)$$

positiv für alle $t \in [-\frac{1}{2}, -\beta]$.

Aus (10) folgt:

$$\begin{aligned} p^{-1, -\beta} g_1(\beta, \cdot) &= p^{-1, -\frac{1}{2}} \tilde{p}^{-\frac{1}{2}, -\beta} g_1(\beta, \cdot) \\ &= \int_{-1/2}^{-\beta} p^{-\beta, -1, t} (L_t - \tilde{L}_t) \tilde{p}^{t, -\beta} g_1(\beta, \cdot) dt. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$(13) \quad p^{-1, -\beta} g_1(\beta, \cdot) \geq p^{-1, -\frac{1}{2}} \tilde{p}^{-\frac{1}{2}, -\beta} g_1(\beta, \cdot)$$

für alle $\beta \in (-\frac{1}{2}, 0)$.

Aus den Voraussetzungen an u folgt:

$$a(., t) \cdot \frac{\Delta}{2} g_1(t, .) \geq \frac{\Delta}{2} g_1(t, .) \quad \text{für alle } t \in [-1, -\frac{1}{2}].$$

Daher gilt nach Folgerung 2.2:

$$(14) \quad P^{-1, -\frac{1}{2}} g_1(\frac{1}{2}, .) \geq g_1(1, .).$$

Aus (9), (11), (13), (14) erhalten wir die gewünschte Abschätzung der Funktion $P^{-1,0} g_1(\beta, .)$:

$$(15) \quad P^{-1,0} g_1(\beta, .) \geq \exp(C_1 \cdot C_2 \cdot \int_{-1/2}^{-\beta} \frac{\omega(|\lambda|)}{|\lambda|} d\lambda - 1) \cdot g_1(1, .).$$

Da $\|g_1(1, .)\|_1 = 1$ ist, folgt insbesondere:

$$\|P^{-1,0} g_1(\beta, .)\|_1 \geq \exp(C_1 \cdot C_2 \cdot \int_{-1/2}^{-\beta} \frac{\omega(|\lambda|)}{|\lambda|} d\lambda - 1)$$

für alle β aus $(0, \frac{1}{2})$. Es gilt jedoch $\|g_1(\beta, .)\|_1 = 1$

für alle β . Somit folgt die Behauptung aus den Voraussetzungen an die Funktion ω .

Beispiel 1: Wir definieren die Funktion ω durch $\omega(0) := 0$,

$\omega(\lambda) := -\frac{1}{\ln \lambda}$ für $\lambda \in (0, \frac{1}{e}]$ und $\omega(\lambda) := 1$ für

$\lambda \in (\frac{1}{e}, \infty)$. Dann erfüllt ω die Voraussetzungen des Satzes,

insbesondere gilt $\int_0^1 \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} d\lambda = +\infty$. Sei a die im Satz

konstruierte Funktion. Da für jedes $\alpha \in (0, 1)$ gilt

$\int_0^1 \frac{\omega(\lambda)^{1/\alpha}}{\lambda} d\lambda < +\infty$, ist die Funktion a für jedes

$\alpha \in (0, 1)$ Dini- (α) -stetig im Sinne von FABES/SROKA/WIDMAN

[1]. Die Dini- (α) -Stetigkeit der Koeffizienten von $\{L_t\}$

für ein beliebiges α mit $\alpha < 1$ reicht also nicht aus, um

eine Abschätzung der Form $\|P^{-1,0} f\|_1 \leq k \cdot \|f\|_1$ für eine

geeignete Konstante k herzuleiten.

Anhang

1. Beweis eines Hilfssatzes aus der reellen Analysis

Hilfssatz 1: Sei f eine stetige reelle Funktion auf dem Intervall $[a, b]$, die in jedem Punkt aus (a, b) linksseitig differenzierbar ist. Sei M eine Konstante, so daß der Betrag der linksseitigen Ableitung von f in jedem Punkt aus (a, b) kleiner oder gleich M ist.

Dann genügt die Funktion f der folgenden Lipschitz-Bedingung:

$$|f(\lambda) - f(\mu)| \leq M \cdot |\lambda - \mu| \quad \text{für alle } \lambda, \mu \in [a, b].$$

Dieser Hilfssatz folgt aus einer Variante des Mittelwertsatzes, die nur einseitige Ableitungen enthält (siehe DIEUDONNÉ [1], Chap. VIII Problème 2). Aus Gründen der Bequemlichkeit geben wir einen direkten Beweis.

Beweis: O.B.d.A. können wir voraussetzen, daß gilt $\lambda < \mu$. Wir zeigen, daß die Annahme $f(\mu) - f(\lambda) > M \cdot (\mu - \lambda)$ auf einen Widerspruch führt. Sei

$$\tilde{M} := \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda}.$$

Wir definieren eine reelle Funktion g auf $[\lambda, \mu]$ durch:

$$g(x) := f(x) - f(\lambda) - \tilde{M} \cdot (x - \lambda) \quad \text{für alle } x \in [\lambda, \mu].$$

Die Funktion g ist stetig und nimmt daher ihr Supremum an. Da $g(\lambda) = g(\mu) = 0$ ist, können wir ein $x_0 \in [\lambda, \mu]$ mit $x_0 \neq \lambda$ finden, so daß $g(x_0)$ gleich dem Supremum der Funktion g ist. Folglich gilt:

$$\frac{g(x_0) - g(x)}{x_0 - x} \geq 0 \quad \text{für alle } x \in [\lambda, x_0] .$$

Andererseits folgt aus der Definition der Funktion g und den Voraussetzungen an die Funktion f :

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x_0 - x} &= -\tilde{M} + \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \\ &\leq -\tilde{M} + M < 0 . \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir einen Widerspruch. Analog läßt sich zeigen, daß die Annahme $f(\mu) - f(\lambda) < -M \cdot (\mu - \lambda)$ auf einen Widerspruch führt.

2. Hilfsmittel aus der Matrizenrechnung

Mit A und B bezeichnen wir reelle $d \times d$ -Matrizen für eine feste natürliche Zahl d .

2.1. Seien A und B positiv semidefinit. Dann gilt $\text{tr}(A \cdot B) \geq 0$.

Beweis: Sei $A^{1/2}$ die positiv semidefinite Quadratwurzel von A . Es gilt $\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(A^{1/2} \cdot B \cdot A^{1/2})$. Da die Matrix $A^{1/2} \cdot B \cdot A^{1/2}$ positiv semidefinit ist, gilt $\text{tr}(A^{1/2} \cdot B \cdot A^{1/2}) \geq 0$.

2.2. Seien A und B positiv definit und es gelte $A \leq B$. Dann gilt $B^{-1} \leq A^{-1}$ (vgl. HALMOS [1], Abschnitt 82 Aufg. 15).

Beweis: Sei $A^{1/2}$ die positiv definite Quadratwurzel von A . Aus $A \leq B$ folgt $\mathbb{1} \leq A^{-1/2} \cdot B \cdot A^{-1/2}$. Folglich sind die Eigenwerte der Matrix $A^{-1/2} \cdot B \cdot A^{-1/2}$ größer oder gleich 1. Also sind die Eigenwerte der inversen Matrix $A^{1/2} \cdot B^{-1} \cdot A^{1/2}$ kleiner oder gleich 1. Aus $A^{1/2} \cdot B^{-1} \cdot A^{1/2} \leq \mathbb{1}$ folgt

schließlich $B^{-1} \leq A^{-1}$.

2.3. Seien A , B und $A + B$ invertierbar. Dann ist $A^{-1} + B^{-1}$ invertierbar und es gilt:

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A - A \cdot (A + B)^{-1} \cdot A.$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} & (A^{-1} + B^{-1}) \cdot [A - A \cdot (A + B)^{-1} \cdot A] \\ &= A^{-1} \cdot \{1 + A \cdot B^{-1}\} \cdot [(A + B) - A] \cdot (A + B)^{-1} \cdot A \\ &= A^{-1} \cdot (A + B) \cdot (A + B)^{-1} \cdot A \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.4. Sei eine stetig differenzierbare matrixwertige Funktion $t \rightarrow A(t)$ gegeben. Sei $A(t)$ invertierbar für alle t . Dann ist die Funktion $t \rightarrow A(t)^{-1}$ ebenfalls stetig differenzierbar und besitzt die Ableitung $t \rightarrow -A(t)^{-1} \cdot \frac{dA}{dt}(t) \cdot A(t)^{-1}$.

Beweis: Da $A(t)$ invertierbar ist für alle t , ist $t \rightarrow (\det A(t))^{-1}$ eine stetige reelle Funktion. Folglich ist die matrixwertige Funktion $t \rightarrow A(t)^{-1}$ stetig und es gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot (A(t+h)^{-1} - A(t)^{-1}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} A(t+h)^{-1} \cdot \frac{1}{h} \cdot (A(t) - A(t+h)) \cdot A(t)^{-1} \\ &= A(t)^{-1} \cdot \left(-\frac{dA}{dt}(t)\right) \cdot A(t)^{-1}. \end{aligned}$$

2.5. Unter den Voraussetzungen von 2.4. gilt:

$$\frac{d}{dt} (\det A(t)) = \text{trace} \left(\frac{dA}{dt}(t) \cdot A(t)^{-1} \right) \cdot \det A(t).$$

Beweis: Aus $A(t+h) = A(t) + h \cdot \frac{dA}{dt}(t) + o(h)$ folgt

$$A(t+h) \cdot A(t)^{-1} = 1 + h \cdot \frac{dA}{dt}(t) \cdot A(t)^{-1} + o(h).$$

Aus der expliziten Darstellung der Determinante folgt weiter:

$$\det (A(t+h) \cdot A(t)^{-1}) = 1 + h \cdot \text{trace} \left(\frac{dA}{dt}(t) \cdot A(t)^{-1} \right) + o(h) .$$

Aus dem Multiplikationssatz für Determinanten folgt:

$$\det (A(t+h))$$

$$= \det (A(t)) + h \cdot \text{trace} \left(\frac{dA}{dt}(t) \cdot A(t)^{-1} \right) \cdot \det (A(t)) + o(h) .$$

Bezeichnungen

Die unten aufgeführten Bezeichnungen werden in der Arbeit ohne weitere Erklärung verwendet.

$\mathbb{R}^d$	d-dimensionaler euklidischer Raum
x_i	bezeichnet für $x \in \mathbb{R}^d$ die i-te Koordinate von x
$\ \cdot\ $	euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$
$(\cdot, \cdot)$	Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$
$U_r(x)$	bezeichnet für $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ die Menge aller y aus $\mathbb{R}^d$ mit $\ y-x\ < r$
$C^M, \bar{M}$	Komplement bzw. Abschluß der Menge M
$C(\mathbb{R}^d)$	Menge der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}$
$C^k(\mathbb{R}^d)$	Menge der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}$
$C_b(\mathbb{R}^d)$	Menge der beschränkten stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$
$C_b^k(\mathbb{R}^d)$	Menge derjenigen Funktionen aus $C^k(\mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}^d)$, so daß partielle Ableitungen bis zur Ordnung k in $C_b(\mathbb{R}^d)$
$C_c(\mathbb{R}^d)$	Der zusätzliche Index c bezeichnet Funktionen mit kompaktem Träger
$\ \cdot\ _p$	L^p -Norm
$\tau_x f$	$\tau_x f(y) := f(y-x)$ für eine Funktion f auf $\mathbb{R}^d$, $x, y \in \mathbb{R}^d$
$g_d(\cdot, \cdot)$	Gaußscher Kern, $g_d(t, x) := (2 \cdot \pi \cdot t)^{-d/2} \cdot \exp(-\frac{\ x\ ^2}{2 \cdot t})$
δ_x	Punktmaß auf $\mathbb{R}^d$ mit Masse 1 in x für beliebiges $x \in \mathbb{R}^d$
Δ	Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^d$
$\mathbb{I}$	d-dimensionale Einheitsmatrix
$(A)_{ij}$	bezeichnet für $i, j \leq d$ das entsprechende Matrixelement
$A \geq B$ oder $B \leq A$	bedeutet für dxd-Matrizen A, B, daß A - B positiv semidefinit ist
$\det(A)$	Determinante der quadratischen Matrix A
$\text{trace}(A)$	Spur der quadratischen Matrix A

Literatur

- Aronson, D. G. [1] Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation, Bull. Am. Math. Soc. 73 (1967), 890-896
- Bauer, H. [1] Elliptic differential operators and diffusion processes, Bull. Austral. Math. Soc. 30 (1984), 219-237
- Dieudonné, J. [1] Elements d'analyse 1, Gauthier-Villars Paris (1969)
- Donoghue, W. F., Jr. [1] Monotone matrix functions and analytic continuation, Springer Berlin (1974)
- Dynkin, E. B. [1] Die Grundlagen der Theorie der Markoff-schen Prozesse, Springer Berlin (1961)
- Eidel'man, S. D. [1] Parabolic systems, North-Holland Publ. Comp. Amsterdam-London (1969)
- Fabes, E. B.; Jerison, D. S.; Kenig, C. E. [1] Multilinear Littlewood-Paley estimates with applications to partial differential equations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 79 (1982), 5746-5750
- Fabes, E. B.; Kenig, C. E. [1] Examples of singular parabolic measures and singular transition probability densities, Duke Math. J. 48 (1981), 845-856
- Fabes, E. B.; Sroka, S.; Widman, K.-O. [1] Littlewood-Paley a priori estimates for parabolic equations with sub-Dini-continuous coefficients, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. 6 (1978), 305-334
- Friedman, A. [1] Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall Inc. (1964)

- Halmos, P. R. [1] Finite dimensional vector spaces,
Springer Berlin (1974)
- Il'in, A. M. [1] On fundamental solutions of parabolic
equations, Sov. Math. Dokl. 3 (1962),
1697-1700
- Ladyzenskaja, O. A.; Solonnikov, V. A.; Ural'tseva, N. N. [1]
Linear and quasilinear equations of
parabolic type, Moskau (1967) (russ.)
- Matijcuk, M. I.; Eidel'man, S. D. [1] Parabolic systems
with coefficients satisfying Dini's
condition, Sov. Math. Dokl. 165 (1965),
1461-1464
- Nash, J. [1] Continuity of solutions of parabolic
and elliptic equations, Amer. J. Math.
80 (1958), 931-954
- Stroock, D. W.; Varadhan, S. R. S. [1] Diffusion processes
with continuous coefficients I, II,
Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969),
345-400, 479-530
- Stroock, D. W.; Varadhan, S. R. S. [2] Diffusion processes,
Sixth Berkeley symposium on Math. Stat.
and Prob., vol. III, 361-368
- Stroock, D. W.; Varadhan, S. R. S. [3] Multidimensional
diffusion processes, Springer Berlin
(1979)

Lebenslauf

Am 29. Juli 1958 wurde ich in Bad Saarow als erstes Kind des Psychologen Bernhard Kröger und der Mathematiklehrerin Marieluise Kröger, geb. Schaper, geboren.

Ab 1965 besuchte ich in Leipzig die 55. und später die 49. Polytechnische Oberschule. In den Jahren 1975 und 1976 legte ich an der Erweiterten Thomasoberschule in Leipzig die Reifeprüfung ab.

Auf Grund erfolgreicher Teilnahme an Mathematikwettbewerben für Schüler wurde ich 1973 an der Universität in Leipzig immatrikuliert. Mein Diplom in Mathematik erhielt ich 1977. Von 1977 bis 1979 studierte ich weiter an der Universität in Leipzig mit dem Ziel der Promotion am Lehrstuhl von Herrn Prof. Dr. G. Laßner. Wegen meiner Übersiedlung in die Bundesrepublik Deutschland im Jahre 1980 konnte ich meine Promotion nicht in Leipzig abschließen.

Seit dem Wintersemester 1980/81 war ich am Mathematischen Institut und am Institut für angewandte Mathematik der Universität Erlangen-Nürnberg als wissenschaftliche Hilfskraft, später als wissenschaftlicher Angestellter, tätig und besuchte gleichzeitig die Arbeitsgemeinschaft über Potentialtheorie bei Herrn Professor Dr. H. Bauer.

Erlangen, im September 1986

Pavel Kröger

